



# ESTUDIO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y ELECTRODOS SIMÉTRICOS PARA MODULACIÓN ELECTRO-ÓPTICA RÁPIDA.

Ignacio Enrique Zaldívar Huerta.  
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica.  
Departamento de Electrónica.  
Apartado Postal 51 y 216, Puebla. Pue. México  
zaldivar@inaoep.mx

## RESUMEN

Se presenta un estudio sobre líneas de transmisión, se analizan los parámetros que las caracterizan y enseguida el trabajo se enfoca a los moduladores electro-ópticos, particularmente a sus electrodos. El estudio de estos últimos permitirá contemplar los alcances de tales dispositivos en el campo de las telecomunicaciones.

## 1. INTRODUCCION

Ante la gran demanda de procesamiento y transmisión de información por los medios de comunicación actuales, las técnicas electro-ópticas permiten la posibilidad de transmisión utilizando técnicas ópticas y radiación electromagnética [1]. Las técnicas ópticas utilizan moduladores electro-ópticos integrados en niobato de litio (LiNbO<sub>3</sub>) [2], los cuales operan a frecuencias situadas en el rango de las microondas y poseen un gran ancho de banda. Esto permite aplicaciones de procesamiento de información a muy alta velocidad. La modulación de microondas es posible al utilizar sus electrodos como líneas de transmisión. Para comprender el funcionamiento de estos dispositivos, el estudio aquí presentado se enfoca particularmente a los electrodos de un modulador.

## 2. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN.

Una línea de transmisión puede ser vista como un dispositivo de dos terminales en las que se alimenta la señal y dos terminales en las que se recibe [3]. Consideremos primero la propagación de ondas electromagnéticas afín de obtener ecuaciones que establezcan las condiciones de operación de una línea de transmisión.

### 2.1 ECUACIÓN DE ONDA.

La interdependencia de los campos eléctricos y magnéticos puede mostrarse por medio de una onda electromagnética que se propaga a través del espacio. Para una onda plana que viaja en un medio no conductor,

las ecuaciones de *Maxwell* permiten obtener la *ecuación de onda* que describe el movimiento de estos campos en función del tiempo y del espacio:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad (2)$$

$v^2 = 1/\mu\epsilon$  es la velocidad característica del medio. La

solución general para el campo eléctrico es:

$$E_y = \text{sen}(\mathbf{b}x + \mathbf{w}t) + \text{sen}(\mathbf{b}x - \mathbf{w}t) \quad (3)$$

$\mathbf{b} = 2\pi/l$  es la constante de propagación,  $\mathbf{w} = 2\pi f$  la frecuencia en radianes,  $t$  el tiempo y  $x$  la posición. La expresión (1) es válida para un medio sin pérdidas,  $\sigma=0$ . Si  $\sigma$  es finita, entonces  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , al aplicar esta condición a las ecs. de Maxwell, se obtiene la *ecuación de onda en un medio conductor*:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = (j\mathbf{w}\mu\sigma - \mathbf{w}^2\mu\epsilon)E_y \quad (4)$$

El espacio libre puede considerarse como un arreglo de líneas de transmisión de celdas de campo de ancho y alto  $w/h$ , esto permite relacionar las celdas en términos de *cantidades distribuidas* o por *unidad de longitud*:  $L = \mu$ -inductancia,  $C = \epsilon$ -capacitancia,  $G = \sigma$ -conductancia. Substituyéndolos en (4), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - j\mathbf{w}L(G + j\mathbf{w}C)E_y = 0 \quad (5)$$

Dado que  $E_y = V/h$ , entonces la *ecuación de onda para una línea de transmisión sin pérdidas*:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - j\mathbf{w}L(G + j\mathbf{w}C)V = 0 \quad (6)$$

El efecto de resistencia finita por unidad de longitud en la línea, es:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (R + j\mathbf{w}L)(G + j\mathbf{w}C)V = 0 \quad (7)$$

En su forma simplificada:



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - ZYV = 0 \quad (8)$$

El utilizar  $H_z$  en lugar de  $E_y$ , genera la ecuación de la línea de transmisión que contiene a  $I$  en cada conductor:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - ZYI = 0 \quad (9)$$

## 2.2 IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA.

Las ecs. (8) y (9) relacionan la variación de tensión y corriente con la distancia a lo largo de una línea de transmisión uniforme infinita. Una solución a (8), es:  $V = \exp(gx)$ , tal que al substituirse, produce:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = g^2 e^{gx} = g^2 V \quad (10)$$

Por lo tanto (8) pasa a ser:

$$g^2 - ZY = 0 \quad (11)$$

La cual tiene dos raíces diferentes:

$$g = \pm \sqrt{ZY} = a + jb \quad (12)$$

$g$  es la constante de propagación,  $a$  y  $b$  son las constantes de atenuación y fase respectivamente. La solución general para (8) es:

$$V = C_1 \exp(\sqrt{ZY}x) + C_2 \exp(-\sqrt{ZY}x) \quad (13)$$

$C_1$  y  $C_2$  son constantes, tal que para  $x=0$ ,  $V = C_1 + C_2$ .  $V$  es la tensión instantánea en el punto  $x=0$  sobre la línea, la cual puede considerarse como:  $V = V_1 + V_2$ . Por lo que:

$$V = V_1 \exp(gx) + V_2 \exp(-gx) \quad (14)$$

Derivando con respecto a  $x$ , se obtiene:

$$\frac{dV}{dx} = V_1 g \exp(gx) - V_2 g \exp(-gx) = IZ \quad (15)$$

Finalmente la solución es:

$$I = \frac{g}{Z} [V_1 \exp(gx) - V_2 \exp(-gx)] \quad (16)$$

Introduciendo los términos que definen la constante de propagación en (14) y (16), se obtiene:

$$V = V_1 \exp[(a + jb)x] + V_2 \exp[-(a + jb)x] \quad (17)$$

$$I = \frac{g}{Z} [V_1 \exp[(a + jb)x] - V_2 \exp[-(a + jb)x]] \quad (18)$$

Tomando  $V/I$  a través de la línea para una sola onda viajera, los primeros términos de las relaciones (17) y (18), generan la impedancia característica de la línea:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{Z}{g} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (19)$$

La velocidad de fase de una onda que viaja en la línea, es:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\text{Im} \sqrt{ZY}} \quad (20)$$



Si la línea no tiene pérdidas, la expresión anterior se simplifica:

$$v = \frac{\omega}{\omega \cdot \sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (21)$$

## 2.3 LÍNEA DE TRANSMISIÓN UNIFORME TERMINADA.

La fig. 1 muestra una línea de transmisión uniforme terminada con su impedancia de carga característica  $Z_L$ .

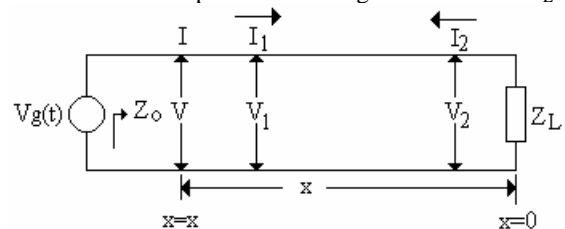


Fig. 1 Línea de transmisión terminada.

Si  $Z_L \neq Z_0$ , existirá una discontinuidad sobre el punto de interconexión línea-carga. Una transmisión eficaz establece que  $Z_0$  debe ser del mismo valor que la impedancia del generador y de la carga afin de evitar reflexión de energía en la línea. Una onda incidente que viaja hacia la carga y otra reflejada que viaja hacia el generador provocará una discontinuidad en la línea. Sean  $V_1$ ,  $I_1$ ,  $V_2$  e  $I_2$  la tensión y corriente incidente y reflejada, respectivamente, la relación entre las amplitudes de las ondas incidentes y reflejada en un punto cualquiera de la línea será el coeficiente de reflexión  $r(x)$ .

$$r(x) = \frac{V_2 \exp(-gx)}{V_1 \exp(gx)} = \frac{V_2}{V_1} \exp(-2gx) = r(0) \exp(-2gx) \quad (22)$$

Con  $r(0) = \frac{V_2}{V_1}$  en  $x=0$ . Al retomar (13) y (16), estas

puedan escribirse como:

$$V(x) = V_1 [\exp(gx) + r(0) \exp(-gx)] \quad (23)$$

$$I(x) = \frac{V_1}{Z_0} [\exp(gx) - r(0) \exp(-gx)] \quad (24)$$

Estas expresiones permiten obtener la impedancia de entrada sobre un punto cualquiera de la línea:

$$Z_{ent}(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0 \frac{\exp(gx) + r(x) \exp(-gx)}{\exp(gx) - r(x) \exp(-gx)} \quad (25)$$

Dado que la carga se localiza en  $x=0$ , en ese punto:

$$Z_{ent}(0) = Z_L = Z_0 \frac{1 + r(0)}{1 - r(0)} \quad (26)$$

La corriente e impedancia resultantes en un punto de la línea y la impedancia en la carga ( $x=0$ ) son:



$$I = I_1 + I_2 \quad (27)$$

$$Z_0 = \frac{V_1}{I_1} = -\frac{V_2}{I_2} \quad (28)$$

$$Z_L = \frac{V}{I} \quad (29)$$

Dado que  $V=V_1+V_2$ , se obtiene:

$$\frac{V_1+V_2}{Z_L} = \frac{V_1-V_2}{Z_0} \quad (30)$$

Resolviendo para  $V_2/V_1$ , el coeficiente de reflexión sobre la carga es:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_0 + Z_L} = r(0) = r_L \quad (31)$$

Lo cual permite determinar la relación entre las ondas incidente y reflejada en un punto cualquiera de la línea.

### 3. ELECTRODOS COPLANARES.

La fig. 2 muestra la configuración para un modulador electro-óptico birrefringente de configuración de electrodos simétricos.

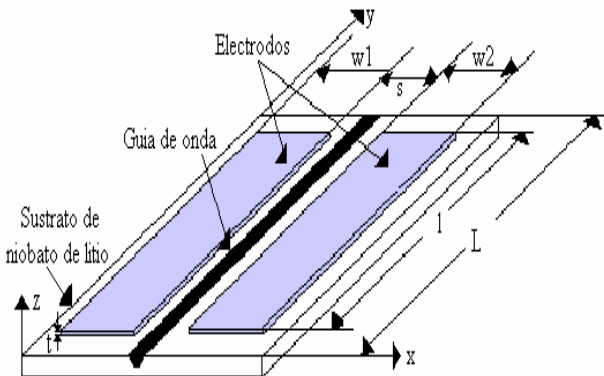


Fig. 2. Electrodo coplanar simétrico.

La modulación electro-óptica recurre a las líneas de transmisión en estructura coplanar simétrica y asimétrica para la modulación a alta frecuencia [3,4]. La señal eléctrica de modulación se propaga a lo largo de la estructura y su respuesta en frecuencia se encuentra limitada por la configuración de electrodos, la atenuación eléctrica y la velocidad de propagación. Los electrodos coplanares están formados por dos bandas metálicas paralelas de anchos  $w_1$  y  $w_2$ , separación  $s$ , grosor  $t$  y una longitud  $l$  depositadas sobre un cristal de  $\text{LiNbO}_3$ . La capacitancia asociada a la estructura así como la velocidad de propagación de las ondas eléctricas permite determinar la impedancia característica de la línea. La capacitancia de los electrodos coplanares puede realizarse mediante la *transformación conforme de Schwarz-Christoffel* [5], la cual considera las estructuras coplanares



como una estructura equivalente de placas paralelas y conductores perfectos de espesor despreciable.

### 3.1 CAPACITANCIA DE ELECTRODOS.

La transformación permite a los electrodos modelarse como un capacitor de placas paralelas (figura 3).

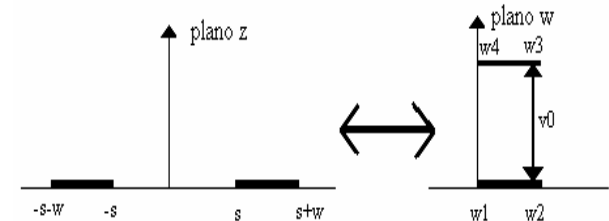


Fig. 3 Geometría de electrodos coplanares simétricos para la transformación conforme.

La transformación se expresa por [4,7]:

$$F(Z) = A \prod_{i=1}^N (z - z_i)^{-k_i} = A (z - z_1)^{-k_1} (z - z_2)^{-k_2} (z - z_3)^{-k_3} (z - z_4)^{-k_4} \quad (32)$$

La transformación es:

$$W = A_0 \text{sn}^{-1}[z, k_s] + B \quad (33)$$

Con:  $k_s = \frac{1}{x_0} = \frac{s}{2w+s}$ ,  $k'_s = \sqrt{1-k_s^2}$  y la separación entre placas dada por la expresión:

$$v_0 = 2 \frac{K(k_s)}{K(k'_s)} \quad (34)$$

La capacitancia de electrodos simétricos:

$$C_s = \epsilon_0 \epsilon_{\text{eff}} \frac{K(k'_s)}{K(k_s)} \quad (35)$$

Para una longitud  $l$ , la capacitancia total es:

$$C_{st} = \epsilon_0 \epsilon_{\text{eff}} l \frac{K(k'_s)}{K(k_s)} \quad (36)$$

La impedancia característica por unidad de longitud es:

$$Z_{os} = \frac{1}{\epsilon_0 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} c} \frac{K(k_s)}{K(k'_s)} \quad (37)$$

$\epsilon_0$  es la permitividad del vacío y  $c$  la velocidad de la luz.

$$n_{\text{eff}} = \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\epsilon_{13} \epsilon_{33}}}{2}} \quad (38)$$

$n_{\text{eff}}$  es el índice de refracción eléctrico visto por las ondas que se propagan en la interface aire-LiNbO<sub>3</sub>.  $K(k) = \text{sn}^{-1}[1, k]$  es la integral elíptica de primer tipo de parámetro  $k$  y  $\epsilon_{13}=44$ ,  $\epsilon_{33}=28$ . La fig. 4 muestra el resultado de simulación del comportamiento de la impedancia para electrodos simétricos con separación de 10  $\mu\text{m}$ .

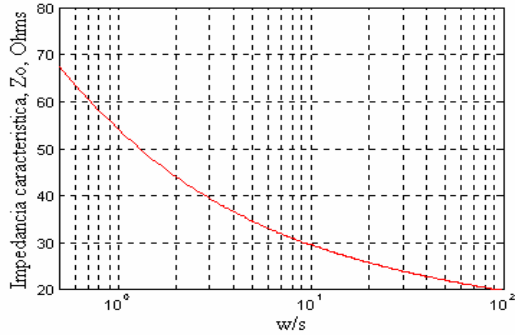


Fig. 4 Impedancia característica para electrodos simétricos.

### 3.2 RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS MODULADORES.

La impedancia, la constante de propagación así como el desacoplamiento de velocidades de propagación de las ondas eléctrica y óptica, determinan la respuesta en frecuencia del modulador. El desacoplamiento se debe a los diferentes índices de refracción vistos a lo largo de la línea,  $n_{eff}$  y  $n_e$ , que corresponden a la onda eléctrica y óptica respectivamente. Las velocidades, sin tomar en cuenta efectos de dispersión, son:  $V_0 = \frac{c}{n_e}$  y  $V_e = \frac{c}{n_{eff}}$ .

La banda pasante eléctrica de un modulador se define por:

$$H(f) = \frac{\Delta f(f, v_g)}{\Delta f(0, v_g)} \quad (39)$$

$\Delta f(f, v)$  es el factor de defasamiento total sobre toda la longitud de los electrodos por la acción de la señal eléctrica aplicada, y viene dada por:

$$\Delta f(f, v) = \frac{pn_e^3 r_{33}}{l} \Gamma_{TM} \frac{v_g}{s} \frac{Z_{ent}}{Z_{ent} + Z_g} l$$

$$\left[ \frac{\exp(j \frac{2pf n_e l}{c})}{[(Z_L + Z_0) \exp(\mathbf{g}_{eff1} l) + (Z_L - Z_0) \exp(-\mathbf{g}_{eff2} l)]} \right] \quad (40)$$

$$\left[ (Z_L + Z_0) \frac{\exp(\mathbf{g}_{eff1} l) - 1}{\mathbf{g}_{eff1} l} + (Z_L - Z_0) \frac{\exp(-\mathbf{g}_{eff2} l) - 1}{-\mathbf{g}_{eff2} l} \right]$$

$$\mathbf{g}_{eff1} = \mathbf{a} + j2pf \frac{(\sqrt{e_{eff}} - n_e)}{c} \quad y$$

$$\mathbf{g}_{eff2} = \mathbf{a} + j2pf \frac{(\sqrt{e_{eff}} + n_e)}{c}$$

son las constantes de fase eléctricas para las ondas incidente y reflejada en la región de iteración y comprende el efecto de desacoplamiento de

las velocidades óptica y eléctrica,  $\alpha$  la constante de atenuación eléctrica,  $\Gamma_{TM}$  el coeficiente de recubrimiento entre el campo magnético y el campo óptico. El defasamiento estático para cuando  $f=0$ , es:

$$\Delta f(0, v_g) = \frac{pn_e^3 r_{33}}{l} \Gamma_{TM} \frac{v_g}{s} \frac{Z_L}{Z_L + Z_g} l \quad (41)$$

La expresión (39) calcula la banda pasante a  $-3$  dB con relación a la respuesta estática. La condición de adaptación perfecta y sin pérdidas de la línea ( $Z_L = Z_g = Z_0 = 50 \Omega$ ) proporciona la respuesta ideal del modulador:

$$H(f) = \exp \left[ jpf \frac{(\sqrt{e_{eff}} - n_e)}{c} l \right] \frac{\text{sen} \left[ pf \frac{(\sqrt{e_{eff}} - n_e)}{c} l \right]}{pf \frac{(\sqrt{e_{eff}} - n_e)}{c} l} \quad (42)$$

La amplitud de  $H(f)$  permite calcular la banda pasante a  $-3$  dB cuando:

$$|H(f)| = \frac{\left| \text{sen} \left[ pf \frac{(\sqrt{e_{eff}} - n_e)}{c} l \right] \right|}{\left| pf \frac{(\sqrt{e_{eff}} - n_e)}{c} l \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (43)$$

Determinando una respuesta en frecuencia dada por:

$$pf \frac{(\sqrt{e_{eff}} - n_e)}{c} l = 1.4$$

El ancho de banda es:

$$f = \frac{1.4c}{pl} \frac{1}{\sqrt{e_{eff}} - n_e} \frac{[Ghz-cm]}{[cm]} \quad (46)$$

Finalmente, la fig. 5 es el resultado de simulación de la expresión (41). Se observa que a mayor longitud de electrodos, menor es la respuesta en frecuencia.

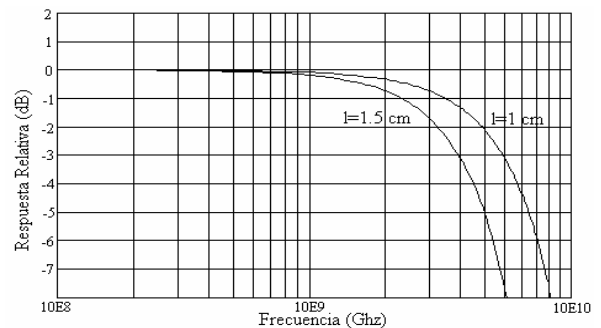


Fig. 5 Respuesta en frecuencia de un modulador electro-óptico.



#### 4. CONCLUSION.

Se ha presentado un estudio sobre líneas de transmisión, particularmente al estudio de electrodos de moduladores electro-ópticos. Los principales resultados aquí mostrados permiten determinar los parámetros característicos para garantizar un diseño de electrodos óptimo para alguna aplicación específica. Para obtener el mejor rendimiento posible, la impedancia debe ser lo más próxima posible a  $50 \Omega$ , en este caso los electrodos cumplen la condición de continuidad de la línea eléctrica. Una buena adaptación, garantiza la transferencia óptima de la señal aplicada entre la fuente y la carga evitando de esta forma el efecto de reflexión. El elegir correctamente las dimensiones de los electrodos permite un mejor acoplamiento y disminuir las pérdidas de propagación.

#### 5. REFERENCIAS

- [1] G. J. Simonis and K. G. Purchase, Optical generation, distribution, and control of microwaves using laser heterodyne *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 38, pp.667-669, May 1990.
- [2] Ed. L. Wooten et al. A review of Lithium Niobate Modulators for Fiber-Optic Communications Systems, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. 6, No. 1, January 2000, pp. 69-82.
- [3] O. Ramer, Integrated Optics Electrooptic Modulator Electrode Analysis, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. QE-18, No. 3, March 1982.
- [4] D. Marcuse Optimal Electrode Design for Integrated Optics Modulators, *IEEE Journal of Quantum electronics*, Vol. QE-18, No. 3, March 1982.
- [5] R. Collin, *Foundations for Microwave Engineering* Mc.Graw-hill, Inc. 1992.