Uso del producto polos-ganancia de lazo abierto para la optimización del ancho de banda

L.A. Sarmiento Reyes, L. Hernández Martínez y J. Gilberto Díaz Pérez
INAOE, Departamento de Electrónica,
A.P. 72000 Puebla, Pue,
email: [jarocho, luish, gdiaz]@inaoep.mx

Resumen

Existen muchos modelos para describir sistemas con retroalimentación, de los cuales los modelos de cajas negras son los más conocidos. Sin embargo, en estos modelos la transferencia unilateral se considera ideal y no se ve afectada por los efectos de carga de entrada y/o salida, la cuál esta lejos de la práctica en electrónica. Para este tipo de sistemas, una buena respuesta en el dominio de la frecuencia resulta primordial. Este artículo introduce un método para la determinación del producto polos-ganancia de lazo abierto (LP), lo que permite determinar qué polos son en realidad polos dominantes.

1 Introducción

Un modelo para describir un sistema eléctronico con retroalimentación es el modelo de ganancia asintótica. El punto inicial para llegar a éste es utilizar la superposición del modelo mostrado en la Figura 1.

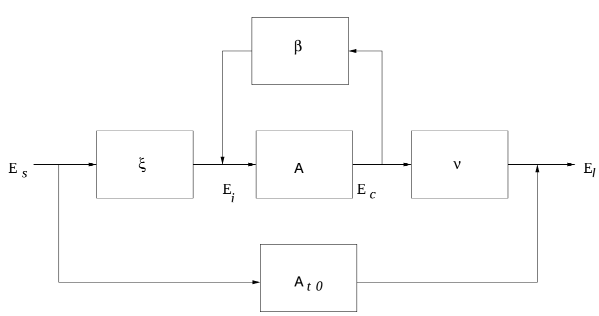

Figura 1: Modelo de superposición

Las señales en este modelo son combinaciones lineales de la fuente de señal E_s y una fuente controlada seleccionada arbitrariamente, E_c. En este caso, no es importante si las señales son voltajes o corrientes, por tanto las señales las denotamos por E. Del modelo, se obtienen el siguiente par de expresiones:

$$\begin{aligned} E_l &= A_{t0}E_s + \nu E_c \\ E_i &= \xi E_s + \beta E_c \end{aligned} \tag{1}$$

donde E_l es la señal de salida, E_i es la entrada de la señal de control de la fuente controlada, E_s es la señal de entrada y E_c es la señal de la fuente controlada. Asimismo, la salida de la fuente controlada depende de la señal de entrada, de acuerdo a:

$$E_c = AE_i \tag{2}$$

donde A es la ganancia de la fuente controlada y β representa la retroalimentación. La transferencia A_t del sistema está definida como la razón entre la señal de fuente y de la carga.

$$A_t = \frac{E_l}{E_s} = A_{t0} + \nu\xi\frac{A}{1-A\beta} \tag{3}$$

El producto $A\beta$ es llamado la ganancia de lazo abierto y tiene gran importancia en sistemas de control. Para una alta ganancia de lazo, la retroalimentación β llega a ser la parte más dominante sobre la transferencia. Cuando la ganancia de lazo se aproxima a ∞, la ganancia asintótica $A_{t\infty}$ es:

$$\lim_{A\beta\to\infty} A_t = A_{t\infty} = A_{t0} - \frac{\nu\xi}{\beta} \tag{4}$$

El factor ν y ξ representan un enlace no ideal entre la de fuente de entrada y el control de entrada de la fuente controlada y un enlace no ideal entre la fuente controlada y la salida, respectivamente. Para simplificar las ecuaciones, usualmente ν=1 y ξ=1, por lo que la expresión para la transferencia queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_t &= \tfrac{E_l}{E_s} \\ &= A_{t\infty}\tfrac{-A\beta}{1-A\beta} + \tfrac{A_{t0}}{1-A\beta} \end{aligned} \tag{5}$$

Para una ganancia de lazo infinita, el segundo término desaparece y en amplificadores prácticos el primer término tiende a dominar al segundo. Para una ganancia de lazo abierto grande, la transferencia puede aproximarse a:

$$A_t = A_{t\infty}\frac{-A\beta}{1-A\beta} \tag{6}$$

Cuando la ganancia A llega a ser infinita, la transferencia del sistema se reduce a:

$$A_{t\infty} = \frac{-1}{\beta} \tag{7}$$

es decir, la transferencia está constituída simplemente por la ganancia de la red de retroalimentación.

En particular, estas características del modelo asintótico son directamente aplicables a sistemas amplificadores, dado que el diseño puede ser separado en dos fases:

Diseño de ganancia asintótica $A_{t\infty}$

Lo que en términos de circuitos involucra el diseño de la red retroalimentada, asumiendo la presencia de un elemento activo de ganancia infinita.

Realización de la ganancia de lazo abierto $A\beta$

Lo que implica el diseño del circuito activo que cuya ganancia se aproxime suficientemente a infinito.

2 Producto LP derivado del modelo de ganancia asintótica

Debido a la dependencia en frecuencia, el modelo de ganancia asintótica puede ser expresado por:

$$A_t(s) = A_{t\infty}\frac{-A(s)\beta}{1-A(s)\beta} + \frac{A_{t0}(s)}{1-A(s)\beta} \tag{8}$$

Cuando la ganancia en corriente directa (CD) y los polos y los ceros de la ganancia $A(s)\beta$ son conocidos, los polos de la transferencia total son obtenidos indirectamente.

Supongamos un sistema de segundo orden, la ganancia puede ser representada por una función con ganancia en CD de $A(0)\beta$ y 2 polos p_1 y p_2

$$A(s)\beta = \frac{A(0)\beta}{(1-\frac{s}{p_1})(1-\frac{s}{p_2})} \tag{9}$$

de la ecuación 8,el polinomio caracteristico (CP) de la transferencia total $A_t(s)$ es representado por:

$$CP(s) = s^2 - s(p_1+p_2) + [1-A(0)\beta]p_1p_2 \tag{10}$$

Para la respuesta máximamente plana en el ancho

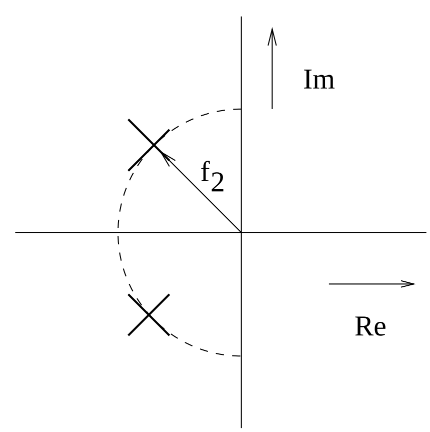

Figura 2: Polos de un polinomio Butterworth de segundo orden

de banda, se requieren polos de una función Butterworth de segundo orden. En la figura 2 se muestran los polos de esta función. Los polos son equidistantes sobre la mitad izquierda del círculo con radio f_2. De esta manera el CP de un Butterworth tiene dos polos p_a y p_b. Desde este punto de vista, podemos decir que son iguales a:

$$\begin{aligned} CP(s) = & \quad s^2 - s(p_a + p_b) + p_a p_b \\ = & \quad s^2 - s(p_a + p_b) + f_2^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Los términos constantes de la ecuación 11 determinan totalmente el ancho de banda deseado. Al comparar las ecuaciones 10 y 11 encontramos f_2, el cual es igual al producto de lazo-polos y ganancia de lazo CD menos 1.

$$f_2^2 = |[1 - A(0)\beta]p_1 p_2| \tag{12}$$

lo que constituye el llamado producto ganancia de lazo abierto-polos de un sistema de segundo orden. Consecuentemente, los términos de la ecuación 10 son una medida para el ancho de banda del sistema. Para un producto de ganancia de lazo abierto-polos (LP) dado, éste determina el máximo ancho de banda alcanzable. Para un sistema de segundo orden, este ancho de banda máximo está dado por:

$$\begin{aligned} f_{2_{max}} = & \quad \sqrt{LP_2} \\ = & \quad \sqrt{|[1 - A(0)\beta]p_1 p_2|} \end{aligned} \tag{13}$$

Para el caso general de un sistema de n-ésimo orden el máximo ancho de banda está dado por:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{n_{max}} = & \quad \sqrt[n]{LP_n} \\ = & \quad \sqrt[n]{|[1 - A(0)\beta(0)] \prod_{i=1}^{n} p_i|} \end{aligned}} \tag{14}$$

3 Polos dominantes

El producto LP predice el máximo ancho de banda para la transferencia, cuando lo que se desea es un comportamiento maximamente plano, esto es, la función de transferencia debe ser del tipo Butterworth. En consecuencia, los polos que puedan ser desplazados hacia la posición Butterworth, cerrando el lazo, necesitan ser utilizados para calcular el producto LP. Estos polos se denominan polos dominantes. Entonces por definición, los polos no dominantes no pueden ser movidos hacia la posición Butterworth y por ello no tiene sentido tomarlos en cuenta para el cálculo del producto LP.

Cuando los coeficientes de la primera potencia de s de las ecuaciones 10 y 11 se comparan resulta que la suma de los polos permanece constante cuando el lazo es cerrado. Por ello, la suma de los polos de lazo equivale a la suma de los polos del sistema, es decir:

$$p_1 + p_2 = p_a + p_b \tag{15}$$

Esto es cierto igualmente para los sistemas de órdenes mayores, i.e. el coeficiente de $s^{(n-1)}$ representa la suma de los polos. De esta propiedad se puede derivar un criterio para los polos dominantes.

A menudo las condiciones arriba mencionadas no están dadas sino que se obtienen por medio de esquemas de compensación. Todos los métodos de compensación en frecuencia tienen la propieded de hacer más grande el coeficiente de $s^{(n-1)}$, es decir la suma de los polos se hace más grande.

Por ello, cuando la suma de los polos de lazo es mayor que la suma arrojada por los polos del sistema, la compensación en la frecuencia no se logra. En este caso, los polos de lazo abierto no pueden colocarse en posición Butterworth, y por ello se toma en cuenta un polo no dominante. El polo de la frecuencia más alta de lazo se debe ignorar y el producto LP y la suma de los polos deben ser calculados nuevamente hasta que se encuentre el orden mayor de los polos dominantes. Por ello, cuando $p_{i_{loop}}$ son los polos de lazo y $p_{i_{system}}$ son los polos del sistema, los polos dominantes son los polos para los cuales se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i_{loop}} \geq \sum_{i=1}^{n} p_{i_{system}} \tag{16}$$

4 Ejemplo

Considérese el sistema de diagramas de bloques de la figura 1 donde: $\xi = \nu = \beta = 1$, y $A(s)$ está dada por la expresión:

$$A(s) = \frac{(100)(1E16)}{s^3 - (1000.011E6)s^2 + (11E12)s - 1.01E18} \tag{17}$$

La función de transferencia de lazo cerrado utilizando la ecuación 6 resulta en:

$$A_t(s) = \frac{(100)(1E16)}{s^3 - (1000.011E6)s^2 + (11E12)s - 1E16}$$

de ésta ultima expresión, el polinomio característico es:

$$CP = s^3 - (1000.011E6)s^2 + (11E12)s - 1E16$$

Resolviendo el CP obtenemos la ubicación de los tres polos:

$$\begin{aligned} s_1 = &\quad -1kHz, \\ s_2 = &\quad -10kHz, \\ s_3 = &\quad -1GHz. \end{aligned}$$

En este caso, la ganancia en CD es de -100. De la ecuación 14 calculamos el ancho de banda máximo producido por el sistema $f_{3_{max}}$:

$$\begin{aligned} f_{3_{max}} &= \sqrt[3]{LP_3} \\ &= \sqrt[3]{|101 \times (-1k \cdot -10k \cdot -1G)\,|} \approx 1MHz \end{aligned}$$

Si ahora únicamente tomamos en cuenta los dos primeros polos, es decir s_1 y s_2 para calcular el producto LP, el máximo ancho de banda $f_{2_{max}}$ es:

$$\begin{aligned} f_{2_{max}} &= \sqrt{LP_2} \\ &= \sqrt{|101 \times (-1k \cdot -10k)\,|} \approx 32kHz \end{aligned} \tag{18}$$

De los sistemas anteriores, se puede observar que la diferencia en ambos resultados con respecto al ancho de banda es un factor de 30, y podemos mencionar que los polos dominantes en este caso son s_1 y s_2, mientras que el polo no dominante es s_3.

5 Conclusión

Un método para el cálculo del producto ganancia de lazo abierto-polos (producto LP) se ha presentado. Esta figura permite definir con más claridad el concepto de dominancia de los polos, resolviendo la cuestión de qué polos deben ser usados para calcular el producto LP. En general, este método puede ser facilmente incorporado al diseño de sistemas lineales con retroalimentación, y más particularmente, a la automatización del diseño de amplificadores de alto rendimiento con retroalimentación negativa.

Referencias

[1] C.J.M. Verhoven, A. Van Staveren, G.L.E. Monna, M.H.L. Kouwenhoven *Structured Electronic Desing Negative-feedback amplifier*, Julio 2001, Delft University of Technology.

[2] L.A. Sarmiento Reyes, E. Yildiz, C.J.M. Verhoeven, A. Van Staveren *Optimising Loo-gain-Poles Product for Desing of Negative Feedback amplifiers by using Symbolic Simulation*, IASTED'2002, Creta, Grecia, Junio 2002.