



# Modelo de un Sistema Dinámico de Levitación Simple no Lineal.

Enrique Ramírez Barrientos y J. Eladio Flores Mena

Facultad de Ciencias de la Electrónica BUAP

Av. San claudio Ciudad Universitaria

Email: [erbarrientos@yahoo.com.mx](mailto:erbarrientos@yahoo.com.mx), y [eflores@ece.buap.mx](mailto:eflores@ece.buap.mx)

**Abstract:** In this work we present the analysis and characterization of a system of control feedbacked with a sign of proportionate position for a sensor laser, which allows to obtain stable levitation of a plant of two degrees of freedom.

**Resumen:** En este trabajo presentamos el modelo de un sistema de levitación simple con dos grados de libertad, caracterizamos y analizamos algunos rasgos importantes de este sistema.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existe un gran interés en la utilización de la levitación electromagnética la cual es muy usada por ejemplo en giroscopios, acelerómetros, trenes de alta velocidad. ello se debe a las grandes e innumerables ventajas que se tienen respecto a los sistemas convencionales [1], esto nos motiva a estudiar la levitación de un disco magnético, que es un sistema dinámico no lineal. Este sistema consiste en mantener flotando, en el aire, un disco de material magnético por medio de una bobina cuya corriente es controlada a partir de una realimentación (de tipo óptica) de la posición de los discos [2].

Las formas mas empleadas para obtener levitación magnetica corresponden a fuerzas de atracción o de repulsion capaces de suspender un móvil, venciendo la fuerza de gravedad, a una distancia deseada, el sistema que se presente en este trabajo corresponde a las dos formas atracción y repulsión.

En la figura 1, se muestra esquemáticamente el sistema de control el cual consiste en una computadora, un microcontrolador 16f877, la etapa de potencia (driver), y la planta.

La planta consta de 2 magnetos en forma de disco, dos bobinas una superior y otra inferior, y también de dos sensores laser colocados en la parte superior e inferior de la planta, el movimiento es en un solo eje. Como ambos discos se pueden posicionar independientemente entonces lo que

tenemos es un sistema con dos grados de libertad de tipo prismático [3].

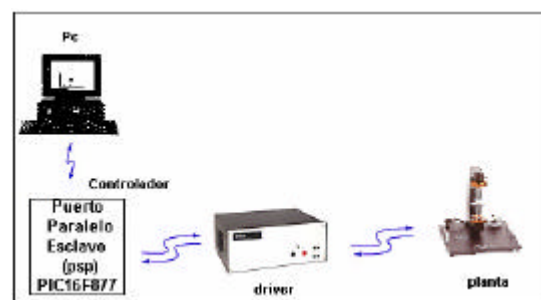


Figura 1. Sistema de control

## 2. PLANTA ELECTROMECHANICA

La planta mostrada en la figura 2, consta de dos bobinas una superior y una inferior, que producen un campo magnetico en respuesta a una señal de corriente DC. Un magneto o dos se mueven a lo largo de una varilla de vidrio de Pyrex. Energizando la bobina inferior, un imán es levantado por medio de una fuerza magnética repulsiva.

Cuando la corriente en la bobina aumenta, el campo magnetico se incrementa y la levitacion del magneto aumenta. Para la bobina superior, la fuerza de levitación es atractiva. Los dos magnetos pueden ser controlados simultáneamente colocándolos en la varilla de vidrio. Los magnetos estan formados de una tierra rara (NeBFe) la cual da origen a un campo magnetico de intensidad muy grande y son diseñados para proporcionar desplazamientos de levitacion grandes para mas claramente mostrar los principios de levitacion y control de movimiento [3].

Dos sensores laser miden la posición de los magnetos. El sensor inferior es usado para medir la posición dada de un magneto en la proximidad a la bobina inferior (en el rango de 8 cm.), mientras que el sensor superior mide la posición dada de un magneto en la proximidad de la bobina superior.



La señal entregada por los sensores que es un voltaje que varía en forma proporcional a la distancia de los discos, esto se hace por medio de la reflexión que emiten los discos hacia unos receptores colocados en la parte superior e inferior.



Figura 2 Planta Electromecánica

### 3. MODELO DINÁMICO

En esta sección describimos el modelo matemático de la planta descrita en la sección precedente. Este es fundamental para profundizar en el análisis y caracterización de nuestro sistema de levitación. El modelo se obtiene a partir de la figura 3, usando el método de cuerpo libre, lo cual consiste en tomar en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre los magnetos. Las expresiones dinámicas que se obtienen en el dominio del tiempo, ecuaciones acopladas no lineales, son útiles para el análisis e implementación del control y para el uso en los experimentos.

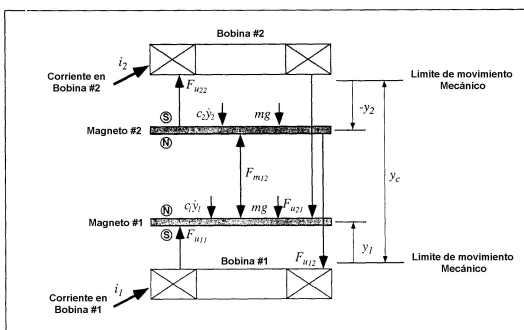


figura 3 Diagrama de cuerpo libre

#### 3.1 Modelo No lineal

El diagrama del cuerpo libre de los dos magnetos suspendidos, en la planta, se muestra en la figura 3. En donde cualquier magneto es actuado por las fuerzas que ejercen las bobinas, la influencia que ejerce el otro magneto, la fuerza de gravedad que ejerce la tierra, y la fuerza de fricción que ejerce el medio (aire).

En base al diagrama de la figura 3, y por el uso de la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación de movimiento para el disco uno

$$m \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + F_{m12} = F_{u11} - F_{u21} - mg \quad (1)$$

similarmente para el segundo disco

$$m \ddot{y}_2 + c_1 \dot{y}_2 - F_{m12} = F_{u22} - F_{u12} - mg \quad (2)$$

donde  $F_{m12}$  es la fuerza magnética que ejerce el disco 2 sobre el disco 1,  $F_{u11}$  es la fuerza magnética que ejerce la bobina inferior (bobina 1) sobre el disco 1,  $F_{u21}$  es la fuerza magnética que ejerce la bobina dos sobre el disco 1,  $c_1 \dot{y}_1$  es la fuerza de fricción que el medio aire ejerce sobre el disco 1 y  $mg$  es la fuerza de gravedad que ejerce la tierra sobre el disco 1. De manera similar se describen los términos en la ecuación (2). La forma explícita de las fuerzas magnéticas son modeladas por las siguientes formas simples [3]

$$F_{u11} = \frac{i_1}{a(y_1 + b)^N} \quad (3)$$

$$F_{u12} = \frac{i_1}{a(y_c + y_2 + b)^N} \quad (4)$$

$$F_{u21} = \frac{i_2}{a(y_c - y_1 + b)^N} \quad (5)$$

$$F_{u22} = \frac{i_2}{a(-y_2 + b)^N} \quad (6)$$

$$F_{m12} = \frac{c}{(y_{12} + d)^N} \quad (7)$$

Las constantes a,b,c,d y N que aparecen en las expresiones anteriores se determinan por medio de un modelado numérico de alguna configuración específica o por métodos empíricos, típicamente 3



$< N < 4.5$ . Mientras que,  $y_{12}$  es la distancia relativa entre los dos discos, que se puede ver de la figura 3, se cumple la siguiente expresión

$$y_{12} = y_c + y_2 - y_1 \quad (8)$$

### 3.2 Modelo Lineal.

Ya que estamos pensando en primera instancia implementar para este sistema un controlador del tipo PID, es necesario linealizar las ecuaciones de nuestro modelo matemático no lineal. Para tal fin, suponemos que las variables sólo se desvían ligeramente de alguna condición de operación, entonces se expande en series de Taylor alrededor de éste punto, si la variación es pequeña, es posible no considerar los términos de orden superior. Así por ejemplo, mostramos enseguida la linealización de la expresión (1). Para esto antes hacemos algunas consideraciones que nos permiten simplificar nuestra ecuación (1), despreciamos las fuerzas  $F_{u12}$  que es en general muy pequeña comparada con  $F_{u11}$ , esto como consecuencia de que la bobina 2 siempre está más lejos del disco 1 que la distancia relativa entre los dos discos. También el término de la fuerza de fricción la despreciamos por ser esta muy pequeña, ya que el aire no es un medio muy resistivo. Con esto en mente, la ecuación (1) se escribe como

$$m \ddot{y}_1 + F_{m12} = F_{u11} - mg \quad (9)$$

Para hacer la expansión en serie de Taylor tomamos como punto de operación  $(y_{20}, u_{10}, y_{10})$ , el cual satisface la condición

$$\mathbf{a}(y_{20}, u_{10}, y_{10}) = 0 \quad (10)$$

donde la función  $\mathbf{a}$  está definida como

$$\mathbf{a}(y_2, u_1, y_1; t) = F_{u11} - F_{m12} - mg \quad (11)$$

para ésta función hacemos la expansión en serie de Taylor, como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(y_2, u_1, y_1, t) &= \mathbf{a}(y_{20}, u_{10}, y_{10}) + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y_1} \bigg|_{y_{20}, u_{10}, y_{10}} (y_1 - y_{10}) + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y_2} \bigg|_{y_{20}, u_{10}, y_{10}} (y_2 - y_{20}) + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u_1} \bigg|_{y_{20}, u_{10}, y_{10}} (u_1 - u_{10}) + \end{aligned} \quad (12)$$

efectuando las derivadas y tomando en cuenta la condición (10), la ecuación (9) adquiere la siguiente forma linealizada

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 &= \left[ \frac{4u_{10}}{a(y_{10} + b)^5} + \frac{4c}{(y_{120} + d)^5} \right] (y_1 - y_{10}) \\ &+ \frac{4c}{(y_{120} + d)^5} (y_2 - y_{20}) + \frac{1}{a(y_1 + b)^4} (u_1 - u_{10}) \end{aligned} \quad (13)$$

haciendo el siguiente cambio de variables,

$$\begin{aligned} y_1^* &= y_1 - y_{10} \\ y_2^* &= y_2 - y_{20} \\ u_1^* &= u_1 - u_{10} \end{aligned} \quad (14)$$

la expresión (13) se escribe como

$$m \ddot{y}_1^* + (k_1' + k_{12}') y_1^* - k_{12}' y_2^* = k_{u1}' u_1^* \quad (15)$$

similarmente para la otra ecuación.

$$m \ddot{y}_2^* + (k_{12}' + k_2') y_2^* - k_{12}' y_1^* = k_{u2}' u_2^* \quad (16)$$

donde



$$\begin{aligned}
 k_1' &= \frac{4u_{10}}{a(y_{10} + b)^5} \\
 k_2' &= \frac{4u_{20}}{a(-y_{20} + b)^5} \\
 k_{12}' &= \frac{4c}{(y_{120} + d)^5} \\
 k_{u1}' &= \frac{1}{a(y_{10} + b)^4} \\
 k_{u2}' &= \frac{1}{a(-y_{20} + b)^4}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

#### 4. COMENTARIOS ADICIONALES SOBRE LA PLANTA

Al trabajar con las diferentes configuraciones mostradas en la figura 4 a lazo abierto, se observan los siguientes casos [3]:

En el primer caso, cuadro superior izquierdo, la bobina genera un campo magnético hacia ambos lados entonces como el disco se encuentra por encima de la bobina

y con las orientaciones indicadas, y teniendo los polos iguales entre la bobina y el disco, entonces la bobina ejerce una fuerza de repulsión hacia arriba la cual es balanceada por la fuerza gravitacional que ejerce la tierra sobre el disco, de este modo el disco llega al equilibrio.

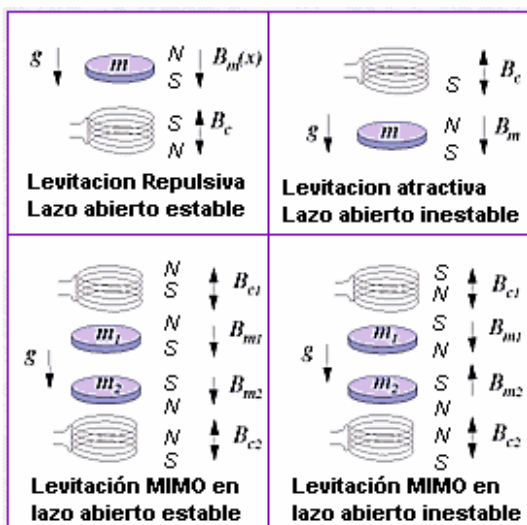


figura 4 diferentes configuraciones

Para el segundo caso, cuadro superior derecho, tenemos que la bobina se encuentra por encima del disco y también con los polos diferentes en este caso las fuerzas que ejercen la bobina y la tierra sobre el disco apuntan en la misma dirección hacia abajo, por lo cual el disco caerá.

En el tercer caso, cuadro inferior izquierdo, tenemos a cada uno de los discos en una situación similar a aquella descrita en el cuadro superior izquierdo, es decir, cada uno de los discos siente fuerzas tanto hacia arriba como hacia abajo, de este modo es posible que cada disco obtenga una posición de equilibrio.

En el cuarto caso, cuadro inferior derecho, las fuerzas que actúan sobre uno de los discos apuntan todas hacia la misma dirección lo cual nos lleva a que los discos no pueden tener un punto de equilibrio.

#### 5. SISTEMA DE CONTROL

El sistema de control ya completo se muestra en la figura 5. ahí se muestra la interacción entre cada uno de los elementos. En la computadora se editan los parámetros de los controladores para cada disco magnético, así como las posiciones deseadas, y también la graficación de las posiciones de los discos en tiempo real. La comunicación entre la pc y el  $\mu\text{CC}16f877$  se hace por medio del puerto paralelo de la pc y hacia el puerto paralelo esclavo (puerta D) del  $\mu\text{CC}$ , el  $\mu\text{CC}$  esta programado para hacer la adquisición de las dos señales analógicas entregadas por los sensores laser y procesar los datos adquiridos por los algoritmos de control en lazo cerrado programados en el PIC dando salida por los módulos PWM y hacia el driver, finalizando con la planta. En los pines de lectura de datos del puerto paralelo podemos realizar la adquisición de datos y enviar la señal de la posición de los discos a la pc para su visualización, esto por la puerta B del  $\mu\text{CC}$  [4].

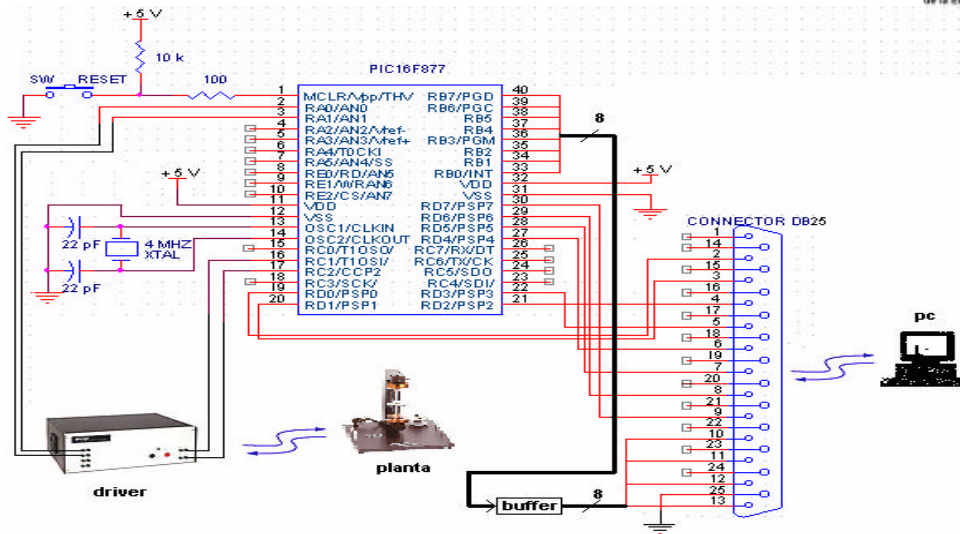


figura 5 sistema de control

## 6. PANEL DE EDICIÓN DE PARAMETROS Y VISUALIZACIÓN GRAFICA

La interfaz de usuario está elaborada con el software de programación grafica LabVIEW5.1 [5], esta consta de un panel frontal figura 6 y un panel esquemático (el cual no es mostrado), desde el panel frontal se editan los parámetros de control para cada uno de los discos y se tiene referencia del recorrido que tiene cada uno de los discos y del comportamiento del sistema, además de la graficación se puede visualizar las señales de las posiciones de los discos esto en tiempo real. Esto nos da referencia acerca de que parámetros tienen un mejor desempeño y cuales no, esto con la idea de proporcionar un sistema de tipo didáctico al usuario con un ambiente agradable y de fácil manejo y para poder hacer pruebas experimentales.

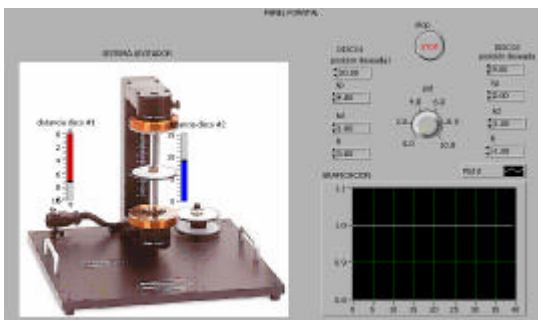


figura 6. panel de visualización grafica.

## 7. RESULTADOS

En la figura 7, se presenta el resultado obtenido en forma grafica para la posición deseada del disco 1, con los parámetros del controlador PID [1] en tiempo real.

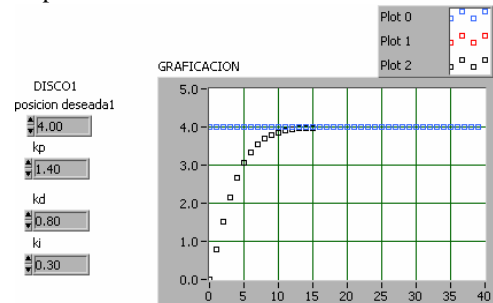


figura 7. grafica de posición de disco 1.

Estos resultados se comparan con la simulación usando el modelo matemático en matlab que se muestra en la figura 8 y podemos ver que coinciden en la forma en como se adquiere la posición deseada, no obstante se puede ver que en la simulación el tiempo para adquirir la posición deseada es menor que en el caso real. Para mejorar la concordancia entre la simulación y el experimento como

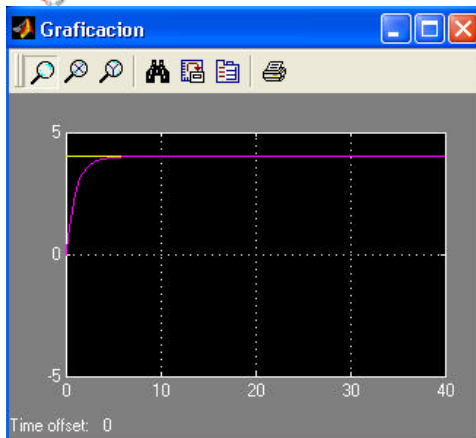


figura 8. simulación en MATLAB.

## 8. CONCLUSIONES.

Se desarrolló un sistema de control para el posicionamiento en una planta con dos grados de libertad, el sistema está constituido por una interfaz de usuario, hecha con programación gráfica en LabVIEW, y enviado al controlador por medio de una interfaz de comunicación.

El controlador PID podemos ver que tiene un desempeño aceptable puesto que realiza el posicionamiento en un tiempo aceptable.

El sistema opera en lazo cerrado y fue posible mantener en la posición deseada a los discos.

Los resultados muestran que es posible probar algunos otros controladores y establecer cuáles tienen un mejor desempeño, como por ejemplo el TANH [2].

## 9. REFERENCIAS.

- [1] K. Ogata, Ingeniería de Control Moderna, Prentice Hall Hispanoamericana, S. A , México (1993).
- [2] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, Prentice hall, Upper Saddle River, NJ 07458 (1996).
- [3] Thomas R. Parks, Magnetic Levitation System Manual For Model 730, California, (1999).
- [4] Manual de programación micro- controladores PIC16F877 Microchip.
- [5] LabVIEW, User Manual, Function and VI Reference Manual, Data Acquisition Basic Manual, January 1998 edition.