



# ALGORITMO CINEMÁTICO PARA PLANIFICAR TRAYECTORIAS.

Aída Salazar Compañ (1), Dr. Daniel Mocencahua Mora (2), Dr. Domingo Vera Mendoza (3)  
Facultad de Físico Matemáticas –BUAP (1), Facultad de Ciencias de la Electrónica –BUAP (2),  
Universidad Tecnológica de Puebla (3)  
Av. San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel. Puebla, Pue. CP.72590.  
E-mail: [s\\_compan\\_aida@hotmail.com](mailto:s_compan_aida@hotmail.com)

## RESUMEN

Se analiza el problema para llevar un robot móvil de su posición actual a una posición deseada en un tiempo mínimo. La posición del robot se determina con las coordenadas  $x_L, y_L$  de un punto L con un ángulo de curso  $\alpha$ . En calidad del punto L tomemos la posición del sensor de la pista colocado en el eje principal del robot, utilizando técnicas de control optimal con ayuda del teorema del Máximo de Pontriagyn.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema optimal de la llegada más rápida de un robot móvil a un punto dado.

Se analiza el problema para llevar un robot móvil de su posición actual a una posición deseada en un tiempo mínimo. La posición del robot se determina con las coordenadas  $x_L, y_L$  de un punto L con un ángulo de curso

$\alpha$ . En calidad del punto L tomemos la posición del sensor de la pista colocado en el eje principal del robot a una distancia h respecto del centro de la base de las ruedas. El robot se mueve en una área plana que puede tener trazos, cuadrículas y faros que ayudan a su navegación como puntos de referencia.

La posición a la que debe llegar el robot la da un faro indicador que determina el seguimiento de la pista. Las coordenadas y la orientación del robot en el punto de llegada se presuponen conocidas. Esta información es utilizada por el robot en los algoritmos de navegación, teniendo en cuenta el camino y la orientación del robot sacados de los datos de un sensor de ángulo.

## 2. RESULTADOS GEOMÉTRICOS

El modelo matemático correspondiente a un problema de control optimal se compone de:

- 1) Empleo de las ecuaciones de movimiento del robot móvil.
- 2) Modelos Matemáticos de control.
- 3) Valores iniciales del vector fásico del modelo matemático del movimiento del robot y su valor final.
- 4) Criterios de optimalidad.

El planteamiento utiliza las ecuaciones cinemáticas de movimiento del robot móvil, donde en calidad de controles se utiliza la velocidad de giro de la rueda izquierda y derecha o bien una combinación lineal de la velocidad transversal V y de la velocidad angular  $\omega$  de movimiento del robot. Este planteamiento y su control lo vamos a llamar cinemático.

El uso del planteamiento cinemático presupone que el movimiento analizado no presta atención a los problemas inerciales de movimiento y a los procesos transitorios asociados con ellos. Demos las ecuaciones cinemáticas normales de movimiento del robot

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{V} \cos \alpha - h \tilde{\omega} \sin \alpha \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{V} \sin \alpha + h \tilde{\omega} \cos \alpha \\ \dot{\alpha} &= \tilde{\omega} \end{aligned}$$

en calidad de controles de este sistema cinemático tomaremos la velocidad transversal  $\tilde{V}$  y velocidad angular  $\tilde{\omega}$  del robot móvil. Esta elección se hace debido a que nos permite de una manera cómoda descomponer el sistema de ecuaciones del robot móvil en canales de control transversal y longitudinal de movimiento. Para los controles utilizemos el siguiente modelo

$$0 \leq \tilde{V} \leq 1, \quad |\tilde{\omega}| \leq \omega_0 = const.$$



Se supone que no se permite el movimiento del robot en reversa. El acotamiento superior del control lo determina la potencia finita de los motores de las ruedas. Vamos a considerar que las funciones  $\tilde{V}$  y  $\tilde{\omega}$  son continuas a trozos y sus valores pueden tener discontinuidades que se encuentran dentro de los límites anteriormente dados. Sin pérdida de generalidad vamos a considerar que en el momento inicial el punto L se encuentra en el origen del sistema coordenado y el cuerpo del robot coincide con el eje OX.

$$x_L(0) = y_L(0) = \alpha(0) = 0$$

Demos las coordenadas del punto final

$$x_L(T) = x_1, \quad y_L(T) = y_1$$

Si la orientación del robot en el punto final está dada, entonces:

$$\alpha(T) = \alpha_1$$

Aquí T es el tiempo en el que el robot alcanza el punto final.

Para la solución de este problema utilizemos el Principio del Máximo de Pontriagyn. Escribamos la función H y el sistema conjugado al sistema de las ecuaciones cinemáticas.

$$H = \psi_x (\tilde{V} \cos \alpha - h \tilde{\omega} \sin \alpha) + \psi_y (\tilde{V} \sin \alpha + h \tilde{\omega} \cos \alpha) + \psi_\alpha \tilde{\omega}$$

$$\dot{\psi}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{\psi}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

$$\dot{\psi}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \psi_x (\tilde{V} \sin \alpha + h \tilde{\omega} \cos \alpha) - \psi_y (\tilde{V} \cos \alpha - h \tilde{\omega} \sin \alpha) - \psi_\alpha \tilde{\omega}$$

Si la orientación del cuerpo del robot en el punto final no se fija entonces para la variable conjugada  $\psi_\alpha$  es correcta la siguiente condición de transversalidad

$$\psi_\alpha(T) = 0$$

Sucede que  $\psi_x$  y  $\psi_y$  son constantes. Si  $\psi_x$  y  $\psi_y$  no se anulan simultáneamente entonces se pueden representar de la siguiente forma

$$\psi_x = \cos \alpha, \quad \psi_y = \sin \alpha, \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 = 1$$

ya que las funciones conjugadas están dadas con una exactitud de un factor común. Considerando el sistema conjugado se transforma a

$$H = \tilde{V} \cos(\alpha - \alpha^*) + [\psi_\alpha - h \sin(\alpha - \alpha^*)] \tilde{\omega},$$

$$\psi_\alpha = \tilde{V} \sin(\alpha - \alpha^*) + h \cos(\alpha - \alpha^*) \tilde{\omega}.$$

Forma de las funciones optimales

Partiendo del principio del máximo de Pontriagyn obtenemos la siguiente forma de las ecuaciones optimales

$$\tilde{V}^{opt} = 0 \text{ si } \cos(\alpha - \alpha^*) < 0,$$

$$\tilde{V}^{opt} = 1 \text{ si } \cos(\alpha - \alpha^*) > 0,$$

$$\tilde{\omega}^{opt} = \text{sign}(\psi_\alpha - h \sin(\alpha - \alpha^*))$$

La estructura dada anteriormente de los controles optimales  $\tilde{V}^{opt}$ ,  $\tilde{\omega}^{opt}$  permiten liberar tres regimenes optimales posibles de movimiento del robot móvil, los cuáles tienen una interpretación geométrica simple:

- 1) Giro del robot en el lugar  $\tilde{V} = 0, |\tilde{\omega}| = \omega_0$ . En este caso el punto C de intersección de la línea de las ruedas con el eje del cuerpo (centro de la base de las ruedas) no se mueve, y el punto L se mueve alrededor de este punto en círculos de radio h.  $\psi_\alpha = \tilde{V} \cos \alpha - h \tilde{\omega} \sin \alpha$
- 2) Un giro con un movimiento simultáneo hacia delante:  $\tilde{V} = 1, |\tilde{\omega}| = \omega_0$ . Bajo esto el centro de la base de las ruedas se mueve en un círculo de radio  $r = (\tilde{V}/(\omega_0))$  con centro colocado en las líneas de las ruedas de izquierda a derecha del aparato. El punto L se mueve por círculos de radio  $r_L = \sqrt{r^2 + h^2}$  con centro en el mismo punto.
- 3) Movimiento en línea recta con la velocidad máxima permisible:  $\tilde{V} = 1, \tilde{\omega} = 0$ .

De ahora en adelante construiremos las trayectorias del viaje del robot a un punto final por el método del pegado de las trayectorias



optimales permisibles descritas anteriormente demostrando en esto que las soluciones obtenidas satisfacen el principio del máximo.

Caso 1. El punto final se encuentra delante del robot y la orientación final del cuerpo del robot no está fija.

Construyamos la trayectoria que enlaza el punto final y el punto inicial con un método de pegado de dos trayectorias optimales permisibles: un giro hacia el lado del punto A con un movimiento simultáneo hacia adelante y movimiento en línea recta hacia el punto A, cuando el eje transversal del robot exactamente está dirigido hacia este punto.

La trayectoria del punto L se muestra en la figura 1 con una línea gruesa.

Caso 2. El punto final se encuentra por la parte de atrás del robot, la orientación final del robot no está fijada.

Es natural suponer que para el problema analizado, la trayectoria combinada se elige de la siguiente manera:

1) Ya que no se permite un movimiento hacia atrás del robot, entonces el movimiento empieza con un giro en el lugar del cuerpo del robot hacia el punto final. Un criterio para finalizar esta maniobra sirve la condición de que este punto se ve bajo en ángulo de 90 grados bajo el eje transversal del robot.

2) Más adelante sucede una conexión en la trayectoria construida en el párrafo anterior ya que en el momento de la conexión el punto final estará delante del robot. Precisamente a esta situación corresponde el fragmento de trayectoria propuesto.

De esta manera toda la trayectoria se compondrá de tres partes: giro en el lugar, giro con movimiento hacia adelante y movimiento rectilíneo (Fig. 2).

Caso 3. La orientación final del cuerpo del robot está dada. El punto final se encuentra enfrente del robot.

Sea que después del desplazamiento hacia el punto final el robot móvil debe continuar el movimiento en determinada dirección, por ejemplo, por una trayectoria trazada la cual empieza en este punto. Entonces la orientación final del cuerpo del robot se determinará con la dirección de la tangente a la línea trazada en el punto dado.



Si el cumplimiento de algunas condiciones respecto a la posición mutua del punto inicial y del punto final, la orientación final del robot en la trayectoria que satisface el principio del máximo se puede construir en tres partes:

- 1) Giro con movimiento hacia adelante
- 2) Movimiento rectilíneo
- 3) Un segundo giro en la misma dirección con un movimiento hacia adelante (Fig. 3).

### 3. CONCLUSIÓN

Utilizando el Principio del Máximo de Pontriagyn se obtuvieron tres resultados interesantes:

- a. Si el punto final está delante del robot y no es necesario darle una orientación final, el robot tiene que moverse en el espacio (fase) en un arco de circunferencia y después en línea recta.
- b. Si el punto final está atrás del robot y no es necesario dar una orientación final, el robot debe moverse primero en un arco de un círculo, después en un arco de otro círculo y después en línea recta.
- c. Si el punto final está delante del robot y la orientación final del robot está dada el robot debe de moverse en un arco de círculo y después en línea recta.

### 5. REFERENCIAS

#### Libros:

- [1] Henry Hermes. Joseph P. Lasalle. *Function Analysis and Time Optimal Control* (Academic Press. USA. 1969).
- [2] Oussama Khatib, John J. Craig, Tomás Lozano Pérez. *The Robotics Review* (The Mit Press. London. 1992).
- [3] Jack Macki, Aaron Strauss, *Introduction to Optimal Control Theory* (Springer-Verlag. New York Heidelberg Berlin. 1982).
- [4] Yoshihiko Nakamura. *Advanced Robotics: Redundancy and Optimización* (Addyson Wesley. USA. 1991).
- [5] Anibal Ollero Baturone. *Robótica. Manipuladores y robots móviles*. (Marcombo. España. 2001).
- [6] Gonzalo Pajares, Jesús M. de la Cruz., *Visión por Computador* (RA-MA. España. 2001).

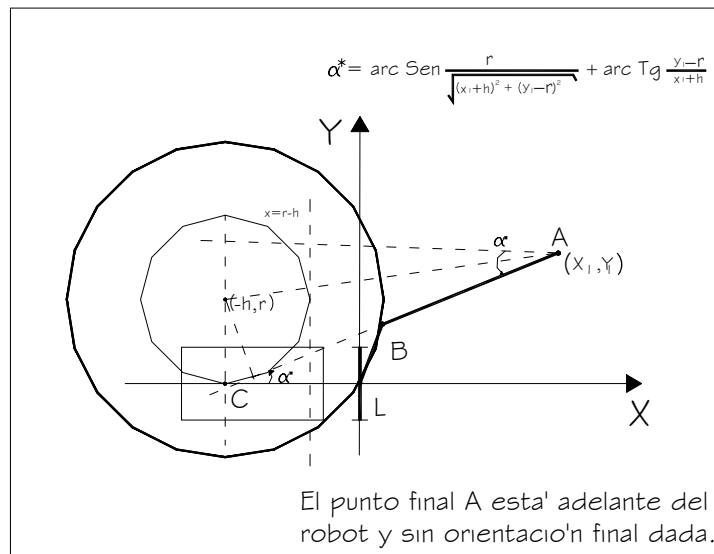


Figura 1

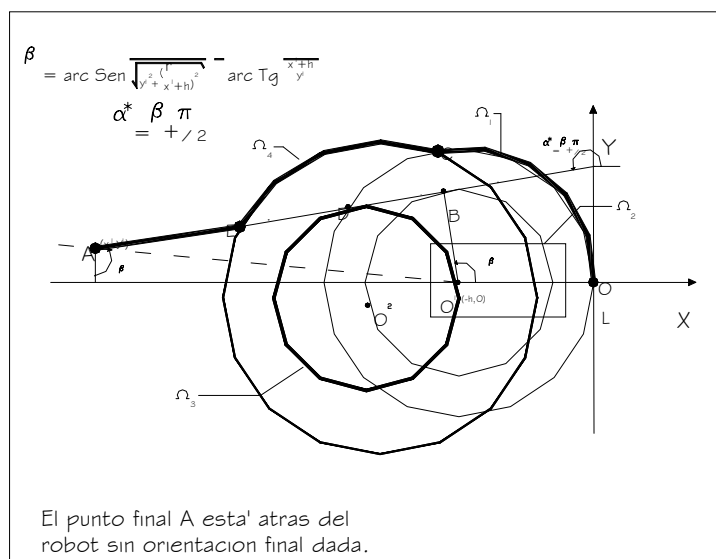


Figura 2

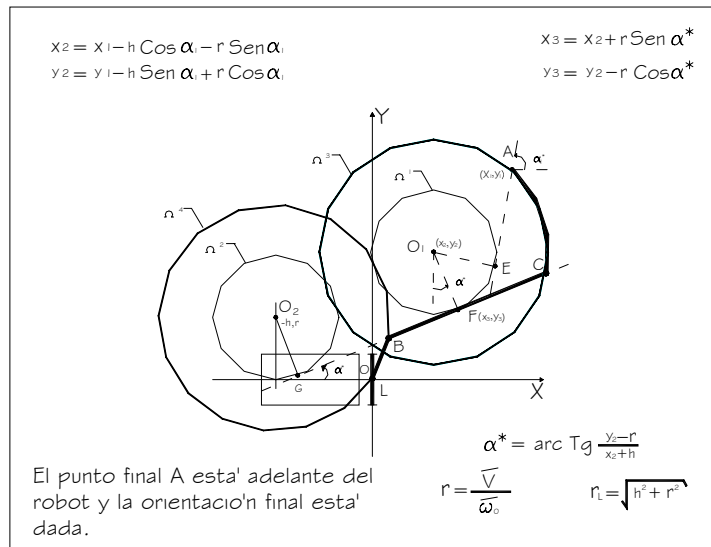


Figura 3