Algoritmo de Control Optimal en el proceso de desempacado del espejo segmentado de un telescopio de Rayos Cósmicos

Leticia Gómez Esparza, V. Vladimir Alexandrov, Humberto Salazar Ibargüen

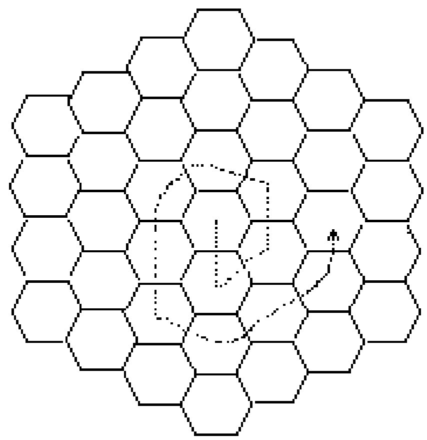
Facultad de Ciencias de la Electrónica, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Introducción.

Se considera el problema de control optimal, a saber, el problema de gasto mínimo en el proceso de desempacado del espejo de un telescopio de rayos cósmicos. El telescopio está formado de 36 segmentos hexagonales regulares y fue diseñado para observar los procesos atmosféricos de la Tierra. En cada etapa del desempacado, se considera al telescopio como un sistema de dos cuerpos absolutamente rígidos (uno es la parte desempacada y el otro la parte sin desempacar). Dichos segmentos están unidos mediante bisagras cilíndricas. El momento de control en cada bisagra es causado por un motor eléctrico. Así pues en este problema se requiere determinar el control, es decir el voltaje que debe ser impreso en cada bisagra para minimizar el gasto de energía en el proceso de desempacado

Descripción del problema

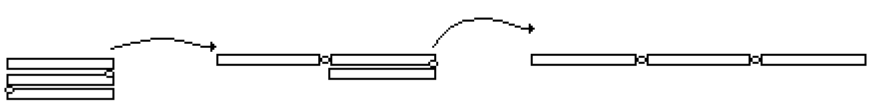
Considérese un telescopio diseñado para observar los procesos atmosféricos de la Tierra. Su espejo, se considera, que siempre está dirigido hacia la Tierra. Supondremos que la estación orbital en la cual se va a instalar, se mueve a lo largo de una órbita circular. El espejo consiste, como ya se había mencionado anteriormente de 36 segmentos hexagonales regulares (como se muestra en la figura 1). Ya que el espejo se va a transportar hacia la órbita en forma de paquete entonces lo que deseamos es minimizar el gasto de



energía en el proceso de desempacado. La línea punteada ilustra la secuencia de desempacado de los segmentos.

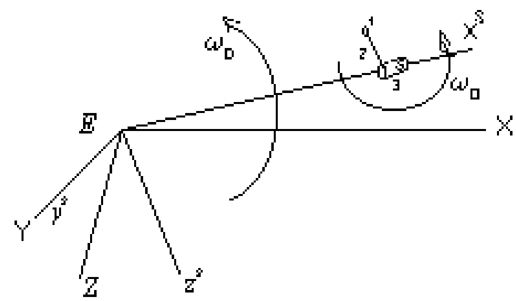
Fig. 1

En el estado de paquete todos los segmentos están unidos de tal manera que la configuración de tal puede ser considerada como un cuerpo absolutamente rígido. El proceso de desempacado se da de manera sucesiva respecto a un segmento inicial llamado Segmento Cero, en la siguiente figura se muestra el desempacado de tres segmentos.



Se supondrá que la parte desempacado del espejo está unida firmemente a la estación la cual se mueve dé tal manera que la parte desempacada está dirigida hacia la Tierra todo el tiempo.

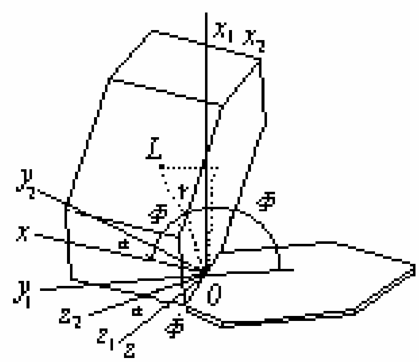
Primeramente mostremos las ecuaciones de movimiento de un segmento respecto a otro que ya ha alcanzado su posición final, para esto introduzcamos el sistema coordenado *EXYZ* con su origen *E* en el centro de la Tierra, el cual se supondrá inercial. Los ejes *EX* y *EZ* están posicionados en el plano de la órbita, mientras que el eje *EY* esta dirigido a lo largo del vector θ_0 de la vector velocidad angular absoluta de la estación. Introduzcamos otro sistema de coordenadas $Ex^s y^s z^s$ que gira alrededor del sistema *EXYZ* con velocidad angular θ_0 de tal manera que el eje Ex^s pasa através del centro de masa *S* de la estación orbital (véase figura 3).



E centro de la Tierra
1 Espejo
2 Bisagra unida a la Estación
3 Estación

Fig. 3

Por otra parte el sistema coordenado $0x_2y_2z_2$ se obtiene por una translación del sistema $Ex^S y^S z^S$ al punto medio *0* del eje de la bisagra a lo largo del cual el desempacado del siguiente segmento tiene lugar. Obsérvese que $0x_2||Ex^s$, $0y_2||Ey^s$ y $0z_2||Ez^s$. El sistema coordenado $0x_1y_1z_1$ sobre el cual se va a hacer el análisis del movimiento de un segmento, se obtiene por la rotación



del sistema $0x_2y_2z_2$ alrededor del eje $0x_2$ por un ángulo α. El punto L es el centro de masa de cada segmento (véase figura 4)

Fig.4

Luego obtenemos las ecuaciones de movimiento en el sistema coordenado $0x_1y_1z_1$, en forma en forma de Lagrange

$$C\ddot{\Phi} = M_{mot} + M_{fric} \qquad (1)$$

$$\Phi = \Phi(t), \Phi(0) = 0, \Phi(t_1) = \pi, \dot{\Phi}(0) = 0, \dot{\Phi}(t_1) = 0$$

aquí C una componente del tensor de inercia $I_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$, de la parte desempacada relativa al eje de la bisagra, M_{fr} es el momento de fricción en el eje de rotación, M_{mot} es el momento causado en la bisagra debido al motor eléctrico.

Por otra parte suponiendo que $\dot{\Phi}$ es proporcional a la velocidad angular de rotación del rotor del motor con coeficiente de proporcionalidad *j*, tenemos que la ecuación del motor es

$$L\dot{I} + RI + cj\dot{\Phi} = k_{yc}U, \;\; M_{mot} = c_m I \qquad (2)$$

donde

I es la intensidad de corriente
L es la inductancia
R resistencia
c es el coeficiente de fuerza contraelectromotriz
j es el radio de ...
k_{yc} es la ganancia en voltaje
c_m es la característica del motor
U es el voltaje externo considerado como un control

El problema optimal en el proceso de desempacado antes descrito, se formula como la forma de encontrar el control U tal que el funcional

$$J_0 = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left(k_1 I^2 + k_2 U^2\right)d\tau \rightarrow \min_U \qquad (3)$$

alcance su valor mínimo en un tiempo terminal fijo t_1, y sin restricciones sobre los parámetros de control U.

El significado físico de los elementos que intervienen en el funcional es el siguiente

La minimización de la expresión

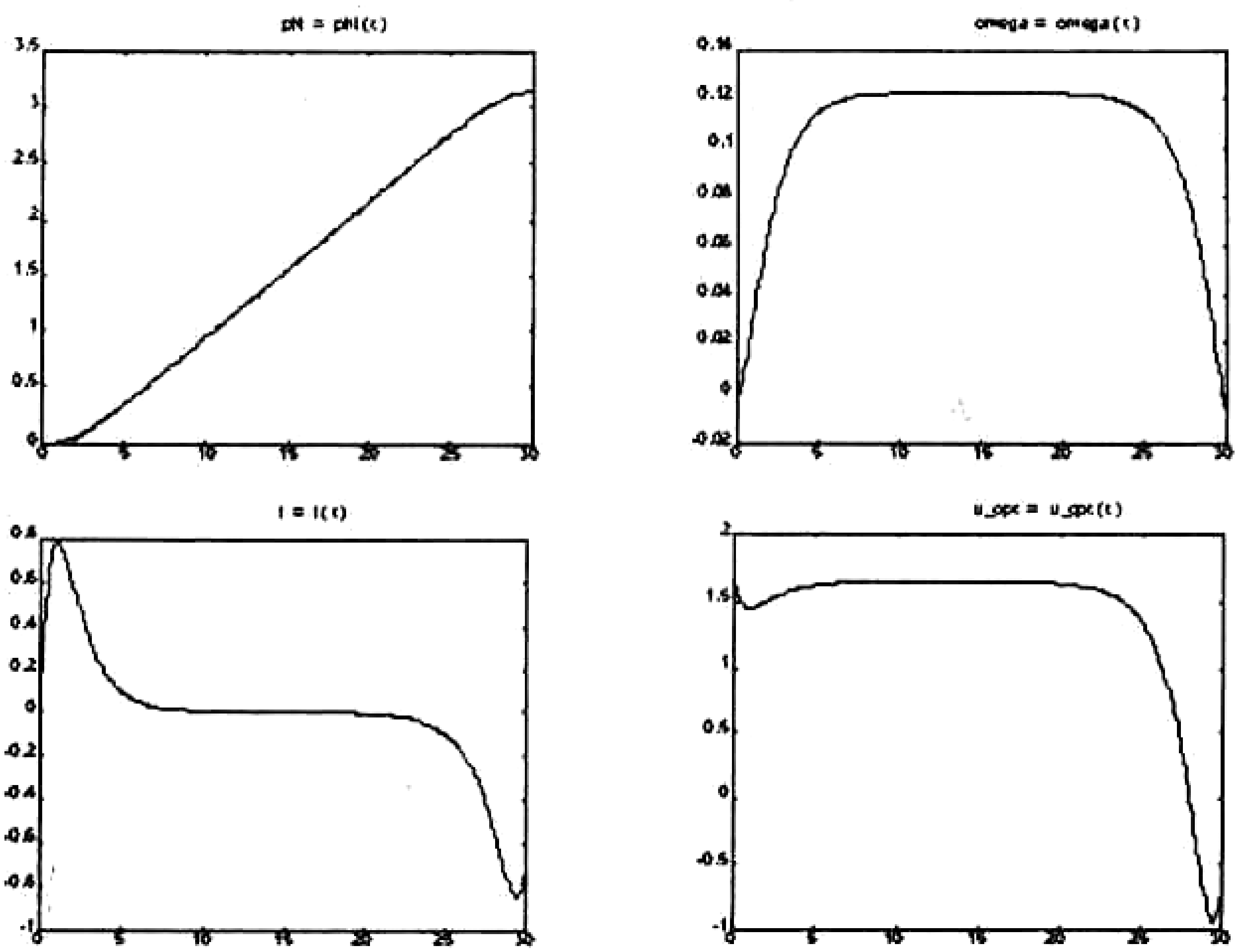
$$\int_0^{t_1} k_1 I^2 d\tau = k_1 c_m{}^2 \int_0^{t_1} M_{mot} d\tau$$

corresponde a la minimización del momento producido por el motor.

La minimización del termino $\int_0^{t_1} k_2 U^2 d\tau$ es la minimización del gasto de energía

Usando el principio del Máximo de Pontryaguin , se redujo este problema optimal a un problema de valores en la frontera con 7 ecuaciones diferenciales.

Y usando MatLab se obtuvo la solución del problema de contorno y



algunos resultados numéricos son presentados en las siguientes gráficas

Bibliografía

1. V. V. Alexandrov, V. Boltiansky, S.S. Lemak, Optimización de Sistemas Dinámicos Controlables.
2. Robert F. Stengel, Optimal Control and Estimation, Dover Publications, Inc. New York.
3. L.S. Pontryaguin, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ed. Aguilar, España, 1973.
4. S. Targ, Theoritical Mechanics, Ed. Mir, Moscu, 1968.