UN MÉTODO QUE FACILITA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES.

AUTORES:

Carlos López Monroy
Escuela de Biología BUAP
Área de Biología Matemática.
E-mail: carloslopezmonroy@hotmail.com

Jorge Alejandro Cebada Ruíz
Escuela de Biología BUAP
Área de Biología Matemática.

RESUMEN.

Una de las áreas de estudio de mayor importancia para la electrónica es, sin lugar a dudas, la referente al comportamiento dinámico de los sistemas físicos lo cual se debe principalmente a que representa la base teórica requerida para el estudio de algunas áreas tales como sistemas de control y teoría de circuitos. Ahora bien, desde el punto de vista de la electrónica el campo de mayor interés de sistemas físicos lo constituyen los sistemas lineales cuyo comportamiento se describe empleando ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

De manera que para conocer el comportamiento de éstos sistemas a través del tiempo es necesario hallar la solución de la ecuación diferencial lineal que describe el sistema. En este caso, uno de los métodos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas consiste en obtener primero la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada para posteriormente obtener una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea dada. De manera que, la solución general de la ecuación diferencial inicial se conforma de la suma de soluciones obtenidas. Por lo que, el método que aquí proponemos facilita la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales evitando hallar soluciones particulares.

1. INTRODUCCIÓN

Miramontes [1] y Sánchez [2] (1996) plantearon una función que transforma la ecuación diferencial no lineal de Bertalanffy [3] (1938) en una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden. A esta función ellos le llamaron Variable Elegante debido a que facilita la resolución de esta ecuación diferencial. En este trabajo nosotros establecemos una función que transforma ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, en ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. A esta función nosotros le hemos denominado Factor Elegante, el cuál constituye un método sencillo y práctico que permite homogenizar ecuaciones diferenciales lineales. Por lo tanto, el objetivo central del presente escrito no es resolver ecuaciones diferenciales lineales (ya que éstas cuentan con una teoría bien conocida y muy completa) sino establecer una metodología que permita transformar una ecuación diferencial lineal no homogénea en una lineal homogénea, facilitando de esta manera su resolución.

2. TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS A LINEALES HOMOGÉNEAS.

Con frecuencia, en el proceso de la formulación matemática de problemas aplicados surgen diversas clases de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este escrito nos limitaremos a tratar el caso de ecuaciones diferenciales lineales [4].

Definición I. Una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea es una ecuación que puede expresarse de la siguiente manera:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

Donde: los coeficientes $a_i(x),\ i=1,2,..n$ son continuos

$a_n(x)\neq 0$ para todo x del intervalo.

Definición II. Una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea es una ecuación que puede expresarse de la siguiente manera:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Donde: los coeficientes $a_i(x),\ i=1,2,..n$ son continuos

El miembro derecho $g(x)$ es continuo

$a_n(x)\neq 0$ para todo x del intervalo.

Ahora bien, cuando n = 1 se obtiene la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Dividiendo entre $a_1(x)$, se obtiene la forma más conveniente:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=q(x)$$

Por otra parte, es posible representar de manera general una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$$

Donde: $F(x,y)=q(x)-P(x)y$

Una vez realizado esto, consideremos entonces el siguiente teorema de existencia y unicidad.

Teorema I. *Si la ecuación diferencial de primer orden:*

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$$

satisface las siguientes condiciones:

1. $F(x,y)$ *es real, finita y continua en todos los puntos de una región rectangular* R *en el plano* xy *definida por* $a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d$ *que contiene al punto* (x_0,y_0) *en su interior.*

2. $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ *es real, finita y continua en todos los puntos de* R.

Entonces existe una y sólo una solución $y=f(x)$ *definida en un intervalo* I *con centro en* x_0.

De esta manera, dada la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = q(x)$$

Donde: $P(x)$ y $q(x)$ se asumen continuas en el intervalo $a \le x \le b$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Donde: $F(x, y) = q(x) - P(x)y$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -P(x)$$

De manera que las condiciones del teorema de existencia-unicidad se cumplen en una región rectangular R acotada por las rectas $x = a$ y $x = b$ concluyendo que existe una solución única en R.

Ahora bien, nosotros le hemos denominado a la función $\left(-P(x)\right)$ Factor Elegante, ya que al multiplicarlo por cada término de la ecuación diferencial lineal obtenemos:

$$\frac{dy}{dx}\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -P(x)F(x, y)$$

Por regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = -P(x)F(x, y)$$

Qué es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden.

Para el caso de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden superior las estructuras de $F(x, y)$ y del Factor Elegante no se modifican. Tomemos como ejemplo la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} = q(x) - P(x)y$$

Multiplicando ahora cada uno de los miembros de esta ecuación por el Factor Elegante $(-P(x) = \partial F(x, y)/\partial y)$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = -P(x)\left(q(x) - P(x)y\right)$$

Por regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{d^2F(x, y)}{dx^2} + Q(x)\frac{dF(x, y)}{dx} = -P(x)F(x, y)$$

Qué es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

Tomemos entonces el caso general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden "n" para corroborar que la estructura de $F(x,y)$ y del Factor Elegante no se modifican:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + C(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \ldots + Q(x)\frac{dy}{dx} = q(x) - P(x)y$$

Multiplicando ahora cada uno de los miembros de esta ecuación por el Factor Elegante $(-P(x) = \partial F(x,y)/\partial y)$ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{d^n y}{dx^n} + C(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \ldots + Q(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = -P(x)\big(q(x) - P(x)y\big)$$

Por regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{d^n F(x,y)}{dx^n} + C(x)\frac{d^{n-1}F(x,y)}{dx^{n-1}} \ldots + Q(x)\frac{dF(x,y)}{dx} = -P(x)F(x,y)$$

Qué es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden "n".

3. CONCLUSIONES.

Finalmente, podemos concluir que aún cuando el método del Factor Elegante facilita la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas transformándolas en ecuaciones lineales homogéneas, este método no resuelve en sí ecuaciones diferenciales. Por lo que, sólo ofrece una alternativa de resolución de ecuaciones diferenciales empleando los métodos de solución ya conocidos.

De esta manera aún cuando ya se cuenta con diferentes métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas tales como coeficientes indeterminados, variación de parámetros e incluso transformadas de Laplace, el método que aquí planteamos facilita la resolución de éste tipo de ecuaciones evitando hallar soluciones particulares. Además el método no sólo facilita la resolución de ecuaciones diferenciales lineales sino también la de ecuaciones integrales [5] e integro-diferenciales lineales de uso frecuente en teoría de circuitos.

REFERENCIAS.

[1] P. Miramontes y F. Sánchez, Variables elegantes: Un método para determinar los parámetros de modelos matemáticos simples en Biología, *Miscelánea Matemática, 23*, 1996, 27-38.

[2] F. Sánchez, *Matemáticas para las Ciencias Naturales* (México, Serie Textos de Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, 1998).

[3] L. V. Bertalanffy, A quantitative theory of organic growth, *Hum. Biol., 10*(2), 1938, 181-213.

[4] M.R. Spiegel, *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas* (México, Prentice-Hall, 1985).

[5] A.M. Wazwaz, *A First Course in Integral Equations* (Singapore, World Scientific, 1997).