ASPECTOS FUNDAMENTALES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Miguel Moreno Scoffi **Rafael Fuerte Velásquez**
Universidad Tecnológica De Huejotzingo
Camino Real a San Mateo s/n Santa Ana Xalmimilulco, Huejotzingo, Puebla
scoffi73@hotmail.com

RESUMEN

El estudio de las matemáticas y principalmente las ecuaciones diferenciales son parte fundamental en la formación de un científico o un ingeniero debido a que estas son la columna vertebral de muchas áreas de estudio de la ciencia y la ingeniería.
Sin embargo, algunas veces se les resta importancia a su estudio, ya que se piensa que son cosas triviales que no tienen una aplicación real, y esto tal vez se deba a la mala concepción de los conceptos matemáticos desde el inicio de la formación académica de los estudiantes.

Además de que muchas veces cuando estas se estudian, se abordan desde el punto de vista clásico sin ver la parte aplicativa hacia las otras áreas del conocimiento, por lo cual los estudiantes, al no ver la utilidad de ellas terminan haciéndolas a un lado.

El presente trabajo se muestra la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la solución de circuitos eléctricos en estado transitorio, presentando la solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales, y además la respuesta numérica, la cual se presenta en forma gráfica, de tal manera que esta sea muchos mas ilustrativa y útil, para comprender e interpretar la solución de la ecuación, que una tabla de números o una ecuación analítica complicada.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo muestra la solución de un circuito eléctrico en estado transitorio, con el fin de ilustrar una de las muchas aplicaciones que tienen las ecuaciones diferenciales; la solución del circuito se hace por medio del método de variables de estado, donde la parte analítica se realiza a través de la transformada de Laplace y la parte numérica se realiza aplicando el paquete MATLAB. Al final del trabajo se da la respuesta del circuito en una grafica la cual nos muestra el comportamiento de las variables de interés del circuito; el método de las variables de estado tiene una amplia aplicación en la solución de sistemas de control.

En la Figura 1 se muestra un circuito RL de segundo orden el cual esta alimentado por una fuente constante de 20 volts, Del cual se quiere conocer el comportamiento de las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

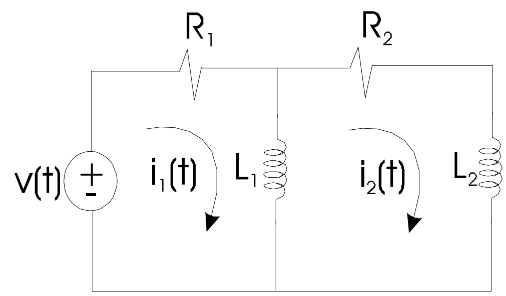

Figura 1 Circuito RL de segundo orden

Las ecuaciones del circuito de la Figura 1 que se obtienen del análisis son :

Para la malla 1

$$-v(t) + R_1 i_1(t) + R_1 i_2(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = 0$$

Para la Malla 2

$$-v(t) + R_1 i_1(t) + R_1 i_2(t) + R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

De las ecuaciones se despejan las derivadas y expresado en forma matricial queda lo siguiente :

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{R_1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} \\ -\dfrac{R_1}{L_2} & -\dfrac{(R_1+R_2)}{L_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{1}{L_1} \\ \dfrac{1}{L_2} \end{vmatrix} v(t)$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación, se expresa de la forma siguiente :

$$X(s) = (Is - A)^{-1}\left(X(o) + Bu(s)\right)$$

La ecuación , en el dominio de Laplace es :

$$\begin{vmatrix} s+\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & s+\frac{(R_1+R_2)}{L_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{vmatrix} V(s) + \begin{vmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{vmatrix}$$

Despejando el vector X(s) que contiene las dos corrientes, se tiene la ecuación :

$$\begin{vmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & s+\frac{(R_1+R_2)}{L_2} \end{vmatrix}^{-1} \left[\begin{vmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{vmatrix} V(s) + \begin{vmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{vmatrix} \right]$$

Invirtiendo la matriz y obteniendo el determinante se llega a la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1(0)+\frac{V(s)}{L_1} \\ i_2(0)+\frac{V(s)}{L_2} \end{vmatrix}$$

Si los parámetros de la red son :

$R_1 = R_2 = 5.6$ Ohms
$L_1 = L_2 = 6$ mH

Los elementos de la matriz (Is - A) son :

$A_{11} = s + 1866.66$
$A_{12} = -933.333$
$A_{21} = -933.333$
$A_{22} = s + 933.333$

Las raíces del determinante da la matriz (Is - A) son :

$\lambda_1 = -356.516$
$\lambda_2 = -2443.49$

La respuesta de cada una de las variables en el circuito de la figura 1, depende de las condiciones iniciales y de la excitación.

Si se supone que las condiciones iniciales en las dos inductancias son iguales a cero, y la excitación es constante de 20 volts, la respuesta de la corriente uno queda expresada por la siguiente ecuación :

$$I_1(s) = \frac{V}{s}\left[\frac{(s+1866.666)(166.666)+(-933.333)(166.666)}{(s+356.516)(s+2443.49)}\right]$$

Si se aplica la expansión en fracciones parciales a la ecuación se tiene la descomposición en los términos siguientes :

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+356.516} + \frac{C}{s+2443.49}$$

Determinando las constantes A,B. y C se tiene :

Para la constante A :

$$A = \lim_{s\to 0} 20\left[\frac{(s+1866.666)(166.666)-155554.88}{(s+356.516)(s+2443.49)}\right]$$

Para la constante B :

$$B = \lim_{s\to -356.516} \frac{V}{s}\left[\frac{(s+1866.666)(166.666)-155554.88}{s+2443.49}\right]$$

Para la constante C :

$$C = \lim_{s\to -2443.49} \frac{V}{s}\left[\frac{(s+1866.666)(166.666)155554.88}{(s+356.516)}\right]$$

De dónde se tiene que :

A= 3.571
B= -2.5841
C= -0.9871

Después de sustituir los valores de las constantes de la ecuación se tiene :

$$I_1(s) = \frac{3.571}{s} - \frac{2.5841}{s+356.516} - \frac{0.9871}{s+2443.49}$$

Transformando al dominio del tiempo por medio de la transformada inversa de Laplace, se tiene finalmente que la respuesta para $i_1(t)$ es :

$$i_1(t) = 3.571 - 2.5841e^{-356.516t} - 0.9871e^{-2443.49t}$$

Si se sustituye valores para t en la solución analítica que se obtiene por medio de la transformada de Laplace se obtienen los siguientes valores.

Tabla 1 Valores de corriente

t	$i_1(t)$
0.00	-2.0000e-004
0.001	1.6761
0.002	2.2969
0.003	2.6836
0.004	2.9501
0.005	3.1363
0.01	3.4979
0.015	3.5587
0.02	3.5689
0.025	3.5707

Si se lleva a cabo el análisis en estado permanente, se encuentra que la corriente $i_1(t)$ es igual a 3.571 amps., debido a que en estado permanente las inductancias se comportan como cortos circuitos.

A continuación se muestra la manera de cómo se simula el sistema de ecuaciones de estado que modelan el comportamiento del circuito RL, por medio de ***MATLAB.***

```
function dotx=circuito_rl(t,x)
vs=20;
R1=5.6;
R2=5.6;
L1=6e-3;
L2=6e-3;
dotx=zeros(2,1);
dotx(1)=-(((R1)*(x(1)))/(L1))-
(((R1)*(x(2)))/(L1))+((vs)/(L1));
dotx(2)=-(((R1)*(x(1)))/(L2))-
((R1*(x(2)))/(L2))-
(((R2)*(x(2)))/(L2))+(vs/L2)
```

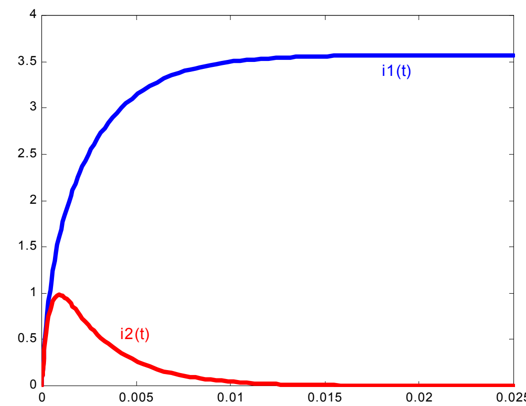

Figura 2. Respuesta de un circuito de RL de segundo orden

La Figura 2 muestra las variables que surgen del circuito de la Figura 1, en donde se puede observar las corrientes durante el estado transitorio. Dicha figura da una visión más ilustrativa de la solución de del sistema de ecuaciones diferenciales más que la sola expresión analítica.

CONCLUSIONES

Este trabajo es algo muy sencillo, ya que los conceptos que aquí se manejan no son nada nuevos, pero la idea principal del trabajo es la de fomentar la enseñanza de las matemáticas no tan solo desde la parte clásica-teórica, sino desde el punto de vista aplicativo.

En este trabajo se consideraron aspectos del análisis de circuitos eléctricos en estado transitorio, ya que es en donde las ecuaciones diferenciales tienen una aplicación en esta área. En la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que surgen del circuito se aplica la técnica de la transformada de Laplace, aunque la solución del sistema de ecuaciones se pudo haber realizado por algún método tradicional, además se hace uso del *MATLAB*, el cual es una herramienta muy poderosa para el análisis de diversos problemas de ingeniería. En la solución del problema se muestra la respuesta analítica la cual resulta de la transformada de Laplace, pero esta solución puede ser muy "fria" algunas veces, ya que solo resultan variables matemáticas sin embargo, si se utiliza una grafica para mostrar la solución del circuito da un panorama más amplio de lo que suceden con las variables del sistema.

Finalmente podemos decir que unos de los objetivos de este trabajo, es buscar que la matemática tenga aplicaciones concretas en la aplicación de problemas reales.

Una pregunta que nos podemos hacer es: ¿las matemáticas para que son útiles?, ¿donde se aplican y que problemas reales podemos resolver?.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Tecnológica de Huejotzingo, y en especial a la Carrera de Electricidad y Electrónica el apoyo brindado para la realización de este trabajo.

Miguel Moreno Scoffi, es Ingeniero Electricista egresado del Instituto Tecnológico de Orizaba en 1997, actualmente se encuentra desarrollando trabajo de tesis para obtener el grado de maestro en ciencias de la ingeniería eléctrica.
Actualmente se desempeña como Profesor Investigador en la carrera de Electricidad y Electrónica de La universidad Tecnológica de Huejozingo.

Rafael Fuerte Velásquez es Fisico-Matematico egresado de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo en el año de 1983. Realiza las maestrías de física del estado sólido y optoelectrónica. Actualmente se desempeña como Profesor Investigador en la carrera de Electricidad y Electrónica de La universidad Tecnológica de Huejozingo.

REFERENCIAS

[1] Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera.
William e. Boyce
Richard C. Diprima
Limusa

[2] Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB.
Shoichiro Nakamura
Pearson Educación.

[3] Ingeniería de control moderna
Katsuhiro Ogata
Prentice-hall

[4] Modelos Matemáticos
Santiago López de Medrano
Trillas

[5] Aspectos fundamentales para la enseñanza de transitorios electromagnéticos.
Rubén Villafuerte Díaz
Miguel Moreno Scoffi
Ricardo Rojas Ortega
Reunion de verano del capitulo de potencia. IEEE 1998.

[6] Análisis de fenómenos transitorios en redes eléctricas. Tesis de Licenciatura.
Miguel Moreno Scoffi
Instituto Tecnológico de Orizaba (1998)