

Uso del Espectro de Densidad de Potencia para la Optimización del Ruido en Amplificadores

L. A. Sarmiento Reyes, L. Hernández Martínez y Próspero López Sánchez
(INAOE), Departamento de Electrónica,
A.P. 72000 Puebla Pue,
email: [jarocho, luish, plopez]@inaoep.mx

Resumen

Tradicionalmente, se optimiza la razón señal a ruido (SNR) en la salida de un amplificador. Sin embargo, para propósitos de diseño es mejor plantear la optimización de la SNR en la entrada de los amplificadores, dado que los niveles de señal suelen ser menores. Se muestra que el espectro de densidad de potencia (SDP) de la SNR en la salida se encuentra directamente relacionado con el SDP de la SNR en la entrada de los amplificadores.

1 Introducción

El rendimiento de un amplificador es determinado por varias figuras de mérito, que son impuestas por la aplicación o por el diseñador. En los requisitos de diseño de un amplificador podemos encontrar: ancho de banda, ganancia, potencia, área, ruido, etc..

El ruido representa el límite inferior de la señal eléctrica que se puede manejar en el amplificador, sin una significativa degradación en la calidad de la señal. Por ello, el análisis del ruido en los amplificadores es importante; principalmente, en sistemas de procesamiento de señal de integración de bajo nivel (receptores de radio AM/FM, receptores de fibra óptica) [3].

Por su naturaleza, el ruido es una señal aleatoria, y para su análisis se recurre a la teoría de procesos aleatorios (PA). Los PA se pueden analizar en el dominio del tiempo o de la frecuencia (donde se encuentran los conceptos de correlación, autocorrelación, espectro de la densidad de potencia, etc.).

Las fuentes de ruido en los amplificadores se encuentran directamente relacionadas con los dispositivos utilizados. En principio, el ruido es debido a la interacción del movimiento de los portadores en la red semiconductora.

2 Procesos Aleatorios

Para un análisis más detallado del presente tema usted puede consultar las referencias [1] y [2].

Proceso aleatorio (o estocástico) es el conjunto de todas las funciones denotadas por $X(t, s)$. Si t es variable y s es fijo el proceso aleatorio representa una función del tiempo. Si t es fijo y s es variable el proceso $X(t, s)$ es una variable aleatoria.

Cada proceso aleatorio tiene una función de distribución y de densidad. Además, las variables aleatorias asociadas a un proceso poseen propiedades estáticas, por ejemplo la media ($E[X(t_i)] = \bar{X}$) y la varianza.

La *función de autocorrelación* de un proceso aleatorio $X(t)$ es la correlación de dos variables aleatorias $E[X_1 X_2]$ ($X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$), definidos por el proceso en los tiempos t_1 y t_2 .

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (1)$$

Si el proceso es estacionario en sentido amplio, entonces

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (2)$$

La *función de correlación cruzada* de dos procesos aleatorios $X(t)$ y $Y(t)$ estacionarios en sentido amplio está definida por

$$R_{XY}(\tau) = R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (3)$$

donde si se cumple que

$$R_{XY}(t, t + \tau) = 0 \quad (4)$$

entonces $X(t)$ y $Y(t)$ son llamados *procesos ortogonales*. Si los procesos son independientes estáticamente, la función de correlación cruzada es

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)]E[Y(t + \tau)] \quad (5)$$

si, además de la independencia de $X(t)$ y $Y(t)$ también son estacionarios en sentido amplio. Entonces la ecuación (5) es una constante.

$$R_{XY}(\tau) = \bar{X}(\bar{Y}) \quad (6)$$

2.1 Tiempo Promedio y Ergodicidad

El tiempo promedio de una cantidad es definido como: $A[\cdot] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cdot] dt$. Los promedios específicos de interes son: el valor *medio del tiempo* $\bar{x} = A[x(t)]$ de la función muestra, y la *función de autocorrelación del tiempo*, denotado por $\mathcal{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t + \tau)]$. Si el proceso $X(t,s)$ es *ergódico* entonces

$$\bar{x} = \bar{X} \quad \mathcal{R}_{xx}(\tau) = R_{XX}(\tau) \quad (7)$$

En otras palabras, el promedio del tiempo \bar{x} y $\mathcal{R}_{xx}(\tau)$ son iguales a las características del promedio estático \bar{X} y $R_{XX}(\tau)$, respectivamente.

2.2 Espectro de Potencia

El *espectro de densidad de potencia (SDP)* para un proceso aleatorio $X(t)$ es:

$$\mathcal{S}_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} \quad (8)$$

donde

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^T X(t)e^{-j\omega t} dt \quad (9)$$

Según el *teorema de Wiener-Khinchin* cuando $X(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio, el SDP se obtiene con la transformada de Fourier de la función de autocorrelación y viceversa

$$R_{XX}(\tau) \longleftrightarrow \mathcal{S}_{XX}(\omega) \quad (10)$$

La potencia promedio P_{XX} de un proceso aleatorio $X(t)$ está dado por

$$P_{XX} = A\{E[X^2(t)]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_{XX}(\omega) d\omega \quad (11)$$

para procesos que son estacionarios en sentido amplio, $E[X^2(t)] = \bar{X}^2$ es una constante, y $P_{XX} = \bar{X}^2$.

El SDP del proceso aleatorio $W(t) = X(t) + Y(t)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{WW}(\omega) &= \mathcal{S}_{XX}(\omega) + \mathcal{S}_{YY}(\omega) \\ &+ \mathcal{F}\{A[R_{XY}(t, t + \tau)]\} \\ &+ \mathcal{F}\{A[R_{YX}(t, t + \tau)]\} \end{aligned} \quad (12)$$

Donde $\mathcal{F}\{\cdot\}$ representa la transformada de Fourier. Los dos primeros términos del segundo miembro son los SDP de $X(t)$ y $Y(t)$, respectivamente. Los dos últimos términos son *el espectro de densidad de potencia cruzada (SDPC)*. Se puede demostrar que

$$\mathcal{S}_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(\omega)Y_T(\omega)]}{2T} \quad (13)$$

$$P_{YX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_{YX}(\omega) d\omega = P_{XY} \quad (14)$$

El total SDPC ($P_{XY} + P_{YX}$) puede ser interpretado como la potencia adicional generado por los dos procesos, debido a que son correlacionados.

2.3 Sistemas LTI

La respuesta de una sistema LTI a la entrada del proceso $X(t)$ aleatoria, está determinada por la integral de convolución, ecuación (15). La ecuación (15) define un proceso $Y(t)$ en términos del proceso $X(t)$.

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)X(t - \xi)d\xi \quad (15)$$

El valor medio de la ecuación (15), asumiendo $X(t)$ estacionario en sentido amplio, es

$$E[Y(t)] = \bar{X} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)d\xi = \bar{Y} \quad (16)$$

La autocorrelación de la salida $Y(t)$ para una entrada $X(t)$ estacionario en sentido amplio, es

$$\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= R_{YY}(t, t + \tau) = E[Y(t)Y(t + \tau)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau + \xi_1 - \xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1d\xi_2 \end{aligned} \quad (17)$$

de la ecuación (17) se deduce que: $Y(t)$ es estacionario en sentido amplio ya que $X(t)$ lo es, y $R_{YY}(\tau)$ es la doble convolución de la autocorrelación de la entrada con la respuesta al impulso del sistema.

Al obtener el SDP de la ecuación (17), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{YY}(\omega) &= H(\omega f)H^*(\omega f)\mathcal{S}_{XX}(\omega) \\ &= |H(\omega)|^2\mathcal{S}_{XX}(\omega) \end{aligned} \quad (18)$$

de la ecuación (18) se observa que el SDP del proceso aleatorio de la salida de un sistema LTI es directamente proporcional al SDP del proceso aleatorio de entrada.

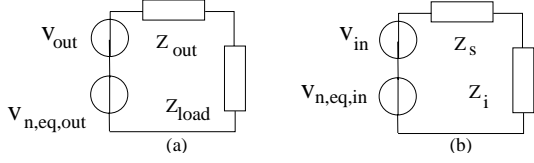


Figura 1: Equivalentes de Thevenin en la salida y entrada.

3 Razon Señal a Ruido

La razón de señal a ruido (SNR) es una medida apropiada para el rendimiento del ruido en amplificadores. Tradicionalmente la relación SNR se determina en la salida del amplificador. No obstante, desde el punto de vista del diseño de amplificadores, es más conveniente asociar la SNR en la entrada del amplificador (*equivalente de SNR en la entrada*) [6]. El equivalente de SNR en la entrada fácilmente se relaciona con el SNR de la salida.

Sea un amplificador con ganancia G (independiente de la frecuencia), $P_{s,out}$ y $P_{n,eq,out}$ la potencia de la señal y del equivalente de ruido en la salida, respectivamente, y $P_{s,in}$ y $P_{n,eq,in}$ las correspondientes cantidades en la entrada. Por definición, la razón señal a ruido es:

$$SNR = \frac{P_{s,out}}{P_{n,eq,out}} \quad (19)$$

utilizando las ecuaciones (11) y (18) resulta

$$SNR = \frac{G^2 P_{s,in}}{G^2 P_{n,eq,in}} = SNR_{eq,in} \quad (20)$$

por tanto, la SNR de entrada puede usarse en el proceso de diseño en lugar de SNR de salida.

En otras palabras, la SNR de la salida, obtenida del equivalente de Thevenin de la figura (1a) (cuando el voltaje es de nuestro interes), es sustituido por la SNR equivalente en la entrada, obtenido por medio del equivalente de Thevenin de la figura (1b). Donde, V_{out} , $v_{n,eq,out}$, y Z_{out} son la información de la señal en la salida del amplificador, *el equivalente de ruido en la salida* (combinación de todas las contribuciones de ruido), y la impedancia de salida libre de ruido, respectivamente. Por último, v_{in} , $v_{n,eq,in}$ y Z_s son la señal de entrada, el equivalente de todo el ruido en la entrada, y la impedancia de la fuente libre de ruido, respectivamente.

3.1 Ruido en BJT y CMOS

El equivalente de ruido en la entrada de los transistores BJT y CMOS se presenta en la figura (2) [3] y

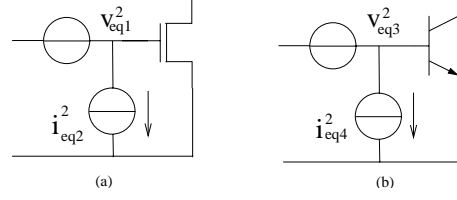


Figura 2: Ruido equivalente en BJT y CMOS

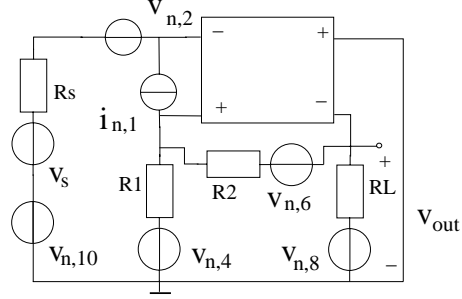


Figura 3: Amplificador con ruido.

[5], donde cada fuente se encuentra representada por su espectro de potencia:

$$v_{i,mos}^2 = \frac{i_d^2 + i_f^2 + i_{dB}^2}{|g_m - j\omega C_{GD}|^2} + 4kTR_g \quad (21)$$

$$i_{i,mos}^2 = |j\omega(g_m - C_{GD})|^2 \frac{i_d^2 + i_f^2 + i_{dB}^2}{|g_m - j\omega C_{GD}|^2} \quad (22)$$

$$v_{i,bjt}^2 = i_f^2 r_b^2 + 4kT(r_b \frac{1}{2g_m}) \quad (23)$$

$$i_{i,bjt}^2 = i_B^2 + i_f^2 + \frac{i_C^2}{\beta_o^2} |1 + j\omega/w_\beta|^2 \quad (24)$$

En el transistor CMOS se consideran los siguientes tipos de ruido: flicker, y térmico en la resistencia de canal, en la resistencia de sustrato, y en la resistencia de compuerta (i_f^2 , i_d^2 , i_{dB}^2 y $4kTR_g$ respectivamente). Para el transistor BJT se considera los tipos de ruido: flicker, y el de disparo en la base y en el colector (i_f^2 , i_B^2 y i_C^2 respectivamente).

4 Ejemplo

La figura (3) muestra un amplificador con retroalimentación, y se desea determinar los equivalentes de entrada de las fuentes de ruido. Por medio de las transformaciones: movimiento de fuentes de voltaje, movimiento de fuentes de corriente, transformaciones Northon - Thevenin y transformaciones a través de dos puertos. se puede demostrar que el equivalente de ruido de entrada se encuentra determinado por la

expresión [6]:

$$v_{n,eq,in} = (R_s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2})i_{n,1} - v_{n,2} - (\frac{R_2}{R_1 + R_2})v_{n,4} + (\frac{R_1}{R_1 + R_2})v_{n,6} + v_{n,10} \quad (25)$$

El espectro de densidad de potencia es:

$$S_{v_{n,eq,in}} = [(R_s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + D_o - B)^2 + (25)$$

$$(R_s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2})^2 D_1^2 (2\pi f)^2] S_3 (1 + \frac{fl, 3}{f}) + (27)$$

$$(\frac{R_2}{R_1 + R_2})^2 S_{v_{n,4}} + (R_s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2})^2 S_5 (1 + \frac{fl, 5}{f}) + (\frac{R_1}{R_1 + R_2})^2 S_{v_{n,6}} + S_{v_{n,10}} + S_{v_{n,12}}$$

5 Conclusiones

La SNR en la salida del amplificador es equivalente a la SNR de la entrada del amplificador. Se demostró que, para propósitos de diseño de un amplificador de bajo ruido es conveniente obtener el SDP del ruido equivalente en la entrada (porque este parámetro determina el rango dinámico inferior), y esté ha sido modelado como una de las fuentes en el equivalente de Thevenin en la entrada del amplificador.

Referencias

- [1] Davenport W. B. y Root W. L., *An Introduction to the theory of Random Signals and Noise*, IEEE PRESS, 1987.
- [2] Peyton Z. Peebles, *Probability, random variables, and random signal principles*, McGraw-Hill, 1980.
- [3] Zhong Y. C. y Willy M. C. S., *Low-Noise wide-band amplifiers in Bipolar and CMOS technologies*, Kluwer academic Publishers, 1991.
- [4] Huijing J. H., et. al., *Analog Circuit Design*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [5] Johns D. y Martin K., *Analog Integrated Circuit Design*, John Wiley & Sons, 1997.
- [6] Verhoeven C.J.M., et. al., *Structured electronic Design*, Edición preliminar, 2001.