Autor: María Monserrat Morín Castillo
Titulo: Recuperación de Fuentes Neuronales a Tráves de Mediciones Electroencefalográficas

INTRODUCCIÓN

Problemas Inversos

Los problemas inversos consisten en que a partir del conocimiento de un fenómeno, recuperara la fuente que lo esta produciendo
Existen diferentes tipos de problemas inversos, algunos de ellos por ejemplo son la localización de mantos acuíferos, localización de algunos componentes del petróleo, detección de tumores, ultrasonido, etc.

Actividad Eléctrica Cerebral

El electroencefalograma (EEG) es el registro clínico más empleado para la evaluación funcional del cerebro. Es una técnica no invasiva y rápida de detección de disfunciones del cerebro. El fisiologo Du Bois Rumond fue el primero en observar en 1948 la aparición de una señal eléctrica durante el paso de un estímulo nervioso periférico. Poco tiempo después, en 1875, R. Caton describio el mismo fenómeno a nivel cerebral y efectúo registros tanto en conejos como en simios . No fue hasta 50 años más tarde que se pudo demostrar la existencia de este tipo de actividad en el cerebro humano. La definición del término electroencefalografía se debe al neoropsiquiatra H. Berger, que fue el primero en efectuar registros en superficie de la actividad eléctrica cerebral en el humano.

En la actualidad la interpretación de los trazos electroencefalográficos requiere de un alto grado de conocimiento y entrenamiento.
Normalmente, los registros superficiales de la actividad eléctrica cerebral se obtienen en forma de diferencias de potencial entre un electrodo activo y otro de referencia, en función del tiempo, esto da como resultado un conjunto de señales recogidas en distintos puntos del cuero cabelludo. A partir de este conjunto se trata de establecer relaciones espaciales o temporales de distintas estructuras que contribuyen a la producción de un fenómeno espontaneo o provocado.

Modelos Matemáticos

La ecuación de Poisson con una condición de contorno de Dirichlet nula.

En esta sección estudiaremos el siguiente problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \qquad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

(1)

Para el análisis de la solución de (1) utilizaremos el método de la función de Green.

Definición: Llamaremos función de Green del problema 1 a la función $G(x,y)$ que satisface el problema:

$$\Delta G(x,y) = \delta(x-y) \qquad x, y \in \Omega$$
$$G(x,y) = 0 \qquad x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega$$

(2)

Teorema : La función de Green $G(x,y)$ existe y es única

Prueba: propone la función de Green en la forma

$$G(x,y) = \tfrac{1}{4\pi|x-y|} + g(x,y)$$

donde

$$\Delta g(x,y) = 0 \qquad x, y \in \Omega$$
$$g(x,y) = -\left[\tfrac{1}{4\pi|x-y|}\right] \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega$$

(3)

Así el problema de encontrar la función de Green del problema (1) debemos estudiar el problema (3). Para este problema ha sido probada la existencia y unicidad .Este análisis se hace con teoría de potencial.

Teorema: la solución u del problema (1) se expresa en la forma

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy$$

(4)

donde $G(x,y)$ es la solución del problema (2)

Prueba: Sea $x \in \Omega$, entonces aplicando las fórmulas de Green a $G(x,y)$ y u junto las condiciones de contorno sobre estas

$$u(x) - \int_\Omega G(x,y) f(y) dy =$$
$$= \int_\Omega \left[u(y)\Delta G(x,y) - G(x,y)\Delta u \ldots\right.$$
$$= \int_{\partial\Omega} \left[u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n} - G(x,y)\frac{\partial \ldots}{\ldots}\right.$$
$$= 0$$

(5)

Por lo tanto,

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy$$

(6)

de donde se concluye la prueba.

Definamos el siguiente operador

$$A = C(\Omega) \to \left\{u \in C^2(\Omega) : \Delta u = f \ \ u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

(7)

$$A(f)(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy$$

(8)

Debemos probar que A es inyectivo o encontrar un subespacio en el que lo sea, es decir, definir bien los espacios de estos operadores.

Solución de la ecuación de Poisson con una condición de contorno de Neumann Nula.

En esta sección estudiaremos el siguiente problema de contorno

$$\Delta u(x) = f(x) \qquad x \in \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega$$

(9)

Definición: Llamaremos función de Green del problema (9) a la función $G(x,y)$ que satisface el siguiente problema:

$$\Delta G(x,y) = \delta(x-y) - \frac{1}{m(\Omega)} \qquad x,y \in \Omega$$
$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = 0 \qquad x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega$$

(10)

donde $m(\Omega)$ es la medida de la región Ω.

Teorema : La función de Green $G(x,y)$ existe y es única.

Prueba: Se propone la función de Green en la forma

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \alpha|x|^2 + g(x,y)$$

donde

$$\Delta g(x,y) = 0 \qquad x,y \in \Omega$$
$$\frac{\partial g}{\partial n}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi|x-y|} + \alpha|x|^2\right] \quad x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega$$

(11)

Así el problema de encontrar la función de Green del problema (10) se debe estudiar el problema (11). Para este problema ha sido probadas la existencia y unicidad. Este análisis se hace con teoría de potencial.

La condición necesaria y suficiente para que el problema (11) tenga solución es que:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n}(x,y)ds_x = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi|x-y|} + \alpha|x|^2\right]ds_x = 0$$

(12)

Aplicando las fórmulas de Gauss para los potenciales de simple capa obtenemos:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi|x-y|}\right]ds_x = 1$$

(13)

Además,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}\left[\alpha|x|^2\right]ds_x = 6\alpha\int_{\Omega} d\Omega = 6\alpha\ m(\Omega)$$

(14)

Si elegimos $\alpha = -\frac{1}{6m(\Omega)}$ entonces se cumple (12). De la existencia y unicidad en el espacio ortogonal (en $L_2(\Omega)$) a las funciones constantes se obtiene el resultado del teorema.

Teorema: la solución u del problema (9) se expresa en la forma

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy$$

(15)

donde $G(x,y)$ es la solución del problema (9)

Problema : Consideremos el problema

$$\Delta u(x) = f \qquad x \in \Omega$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0 \qquad x \in \Omega$$

(16)

sea A el operador siguiente:

$$A : \left\{ f : \langle f, 1 \rangle_{L_2(\Omega)} = 0 \right\} \rightarrow$$
$$\left\{ u : u \text{ satisface el problema } 16 \right\}$$

$$A(f)(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy$$

(17)

Los casos anteriores son modelos que se presentan al resolver el problema electroencefalográfico, en los diferentes casos se emplea la técnica de la función de Green, cuando esta es conocida, y se tiene una expresión para f entonces es posible plantear el problema de recuperación de la fuente, llamado problema inverso.

Conclusiones:

En algunas ocasiones el problema directo puede ser más sencillo de resolver y además que dicha solución sea única, la mayoría de estos casos tiene un problema inverso más complicado y viceversa. Para la localización de las fuentes, es necesario utilizar un método de minimización, y su vez esto nos llega a realizar un análisis sobre el espacio donde se va a realizar la minimización.

Bibliografía

1.- A. Amir, Uniqueness of generators of brain evocqued potencial maps. IEEE transactions Biomedical Engineering 41 (1994), 1-11.

2.- A Fraguela y J Oliveros, Planteamiento operacional para el problema inverso electroencefalográfico. Aportaciones Mat. 22 (1998) 39-54.

3.- A Fraguela y María M Morín Castillo, Planteamiento del problema inverso de localización de los parámetros de una fuente volumétrica de corriente neuronal en forma de dipolo. Aportaciones Mat. 25 (1999) 41-55.

4.- R Plonsey, Biolectrical Phenomena. Mac Graw Hill (1969

5.- J sarvas, Basic mathematical and elctromasgnetic concepts of biomagnetic inverse problem. Phys med biol 32 (1987) 11-22

6.- S L. Sobolev, Partial Differential Equations of mathematical Physics, Addison Wesley Publishing Company (1989).